Concours mathématique de l'AMQ (1996) ordre collégial

Le vendredi, 9 février 1996, de 9:00 à 12:00

Questions

1. Pareil ou pas pareil?

Un sac contient n balles noires et b balles blanches. On tire deux balles sans remise.

a) Déterminer toutes les valeurs du couple (n, b) telles que la probabilité que les deux balles soient de la même couleur est exactement $\frac{1}{2}$.

b) Parmi ces valeurs de (n, b), quelles sont celles pour lesquelles le nombre total de balles utilisées est le plus près possible de 1996?

2. Le rectangle d'aire maximum

Considérons un point quelconque C' situé à l'intérieur d'un quart de cercle ABC (centré en C). Le point C' détermine deux points A', B' sur l'arc $\widehat{AB}$ tels que $C'A'$ est parallèle au rayon CA et $C'B'$ est parallèle au rayon CB (voir figure). Parmi tous les points de l'arc $\widehat{A'B'}$, soit P celui qui *maximise* l'aire du rectangle $C'U'PV'$, inscrit dans la figure $A'B'C'$. Montrer que le rectangle $C'U'PV'$ est alors nécessairement semblable au rectangle $CUPV$.

3. L'équation impossible

Montrer qu'il n'existe pas de nombres entiers positifs x et y tels que $x^2 + x = y^3$.

4. Il y a exactement $n-1$ solutions

Considérons un entier quelconque $n > 1$. Montrer que l'équation suivante, dans laquelle x est l'inconnue, possède *exactement* $n-1$ solutions réelles:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \cdots + \frac{k}{x-k} + \cdots + \frac{n}{x-n} = 0.$$

5. Les diagonales paires

On se donne un parallélogramme dont les longueurs des côtés sont des entiers impairs et dont les longueurs des diagonales sont deux entiers a et b. Montrer que a et b sont nécessairement pairs.

6. Sécante et pente au point milieu

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable deux fois partout. L'un des théorèmes fondamentaux du calcul différentiel est le *théorème de la valeur intermédiaire*. Son énoncé, dans le cas de la fonction f, est le suivant. Étant donnés deux nombres réels distincts $a \neq b$, alors il existe (au moins) un nombre c, situé entre a et b, tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Montrer que les seules fonctions f pour lesquelles nous pouvons utiliser $c = (a+b)/2$, quels que soient les nombres réels $a \neq b$, sont les polynômes de degré inférieur ou égal à 2. En d'autres mots, montrer que les seules fonctions comme ci-dessus, telles que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad \text{pour tous nombres réels } a \neq b,$$

sont de la forme $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, où α, β et γ sont des nombres réels quelconques.

Solutionnaire

1. Pareil ou pas pareil?

a) On veut avoir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \mathrm{P}(\text{couleurs différentes}) \\ &= \frac{2nb}{(n+b)(n+b-1)}. \end{aligned}$$

Ainsi n et b doivent donc satisfaire l'équation $(n+b)(n+b-1) = 4nb$, c'est-à-dire $n^2 - 2nb + b^2 = n + b$, c'est-à-dire $(n-b)^2 = n + b$.
Posons $n = b+k$. L'équation devient $k^2 = 2b+k$, d'où on obtient la famille de solutions

$$b \;=\; \frac{k^2-k}{2} \quad \text{et} \quad n = \frac{k^2+k}{2}$$
$$\text{où} \quad k \in \mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

On remarque que les valeurs négatives de k mènent aux mêmes solutions (à permutation près de n et b) que les valeurs positives de k. Aussi, les valeurs $k = 0$ et $k = \pm 1$ sont à rejeter car elles mènent à des pseudo-solutions $(b = 0, n = 0)$, $(b = 0, n = 1)$ et $(b = 1, n = 0)$ qui sont incompatibles avec la condition de «pouvoir tirer deux balles».
En conclusion, les nombres n et b doivent être deux nombres triangulaires consécutifs tirés de la série

$$\frac{1^2+1}{2}, \frac{2^2+2}{2}, \frac{3^2+3}{2}, \frac{4^2+4}{2}, \cdots =$$
$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, \ldots \;.$$

b) Puisque
$b + n = \dfrac{k^2+k}{2} + \dfrac{k^2-k}{2} = k^2$, le nombre total de balles utilisées est nécessairement un carré parfait. Le carré parfait le plus près de 1996 est $2025 = (\pm 45)^2$. Prenant $k = \pm 45$, on obtient les deux solutions «jumelles»:

990 noires et 1035 blanches
ou 990 blanches et 1035 noires.

2. Le rectangle d'aire maximum

On peut supposer que ABC est la position du cercle unité située dans le premier quadrant du plan cartésien. Posons A' : $(\cos a, \sin a)$, P : $(\cos\theta, \sin\theta)$, B' : $(\cos b, \sin b)$ et

$$\begin{aligned}\delta(\theta) &= \overline{C'V'}\;\overline{C'U'}\\ &= (\cos\theta - \cos b)(\sin\theta - \sin a)\\ &= \text{aire du rectangle } C'U'PV'.\end{aligned}$$

La condition sur P équivaut à

$$f'(\theta) = -\sin\theta(\sin\theta - \sin a) + (\cos\theta - \cos b)\cos\theta = 0.$$

Ainsi, $\dfrac{\cos\theta - \cos b}{\sin\theta - \sin a} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$,

c'est-à-dire $\dfrac{C'V'}{C'U'} = \dfrac{CV}{CU}$.

3. L'équation impossible

Les entiers 0 et 1 sont des cubes et un entier $k > 1$ est un cube précisément lorsque chaque nombre premier entrant dans la factorisation complète de k apparaît avec un exposant multiple de 3. Par exemple, 1728 est un cube car

$$1728 = 2^6 3^3$$

et les exposants, 6 et 3, sont des multiples de 3.

L'équation proposée peut s'écrire sous la forme

$$x(x+1) = y^3.$$

On doit donc avoir que $x(x+1)$ est un cube. Mais x et $x+1$ n'ont pas de facteur premier en commun (c.-à-d. sont relativement premiers). Ainsi, les nombres successifs, x et $x+1$, doivent chacun être un cube. La seule possibilité est $x = 0$, $x+1 = 1$ car l'écart entre deux cubes successifs va en augmentant pour les autres cas.

4. Il y a exactement $n-1$ solutions

Posons

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \cdots + \frac{k}{x-k} + \cdots + \frac{n}{x-n}.$$

Cette fonction est définie pour tous les x réels distincts de $1, 2, \ldots, n$ et sa dérivée

$$\begin{aligned}f'(x) \;&=\; -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{(x-2)^2}\\ &\quad - \cdots - \frac{k}{(x-k)^2} - \cdots - \frac{n}{(x-n)^2}\end{aligned}$$

est strictement négative pour ces valeurs de x. Ainsi, $f(x)$ est strictement décroissante dans chacun des intervalles ouverts

$$(-\infty, 1), (1, 2), (2, 3), \ldots, (k, k+1),$$
$$\ldots, (n-1, n), (n, +\infty).$$

Comme $\lim\limits_{x\to k^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to(k+1)^-} f(x) = -\infty$ pour $k = 1, 2, \ldots, n-1$, on voit que f décroît de

$+\infty$ à $-\infty$ dans chaque intervalle $(k, k+1)$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Il y a donc exactement $n-1$ racines dans ces intervalles. De plus,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to n^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Ainsi, les intervalles $(-\infty, 1)$ et $(n, +\infty)$ ne contiennent pas d'autres racines.

5. Les diagonales paires

Soient x et y les longueurs des côtés. La règle du parallélogramme nous donne

$$a^2 + b^2 = 2(x^2 + y^2).$$

Comme x et y sont impairs, on a

$$x^2 \equiv y^2 \equiv 1\ [2] \text{ et } 2(x^2+y^2) \equiv 0\ [4].$$

On doit donc avoir $a^2 + b^2 \equiv 0\ [4]$, ce qui entraîne que a et b ont même parité. S'ils étaient tous les deux impairs, on aurait $a^2 + b^2 \equiv 2\ [4]$. On doit donc avoir a et b pairs.

6. Sécante et pente au point milieu

Il faut déterminer toutes les fonctions différentiables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$(1) \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'\left(\frac{a+b}{2}\right), \qquad \forall a, b \in \mathbb{R},\ a \neq b.$$

En posant $b = x + y$ et $a = x - y$ dans (1), nous obtenons l'équation

$$(2) \quad f(x+y) - f(x-y) = 2yf'(x), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Il faut déterminer les fonctions f satisfaisant (2).

En dérivant les deux côtés de (2) par rapport à y, nous obtenons

$$(3) \quad f'(x+y) + f'(x-y) = 2f'(x), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

En dérivant les deux côtés de (3) par rapport à y, nous obtenons

$$(4) \quad f''(x+y) - f''(x-y) = 0, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Noter que la dérivée seconde de f existe à cause de (2).

En posant $u = x - y$ et $v = x + y$ dans (4), nous obtenons

$$(5) \qquad f''(v) - f''(u) = 0, \qquad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

En d'autres mots, f'' est une fonction constante. Les seules fonctions f dont la dérivée seconde est une constante sont les polynômes $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ de degré ≤ 2.

Liste des gagnant(e)s du concours mathématique de l'AMQ, ordre collégial

1er	HANLEY, Brian	Marianopolis
2e	VO, Nguyen-Doan	Champlain St-Lawrence
2e ex.	MAJIDEMAMI, Seyed	Vanier
3e	GHITZA, Alexandru Edgar	Jean-de-Brébeuf
4e	POLIS, Vincent	Édouard-Montpetit
4e ex.	ASSELIN, Jérôme	Mérici
	MORIN, Christian	Édouard-Montpetit
	ROCHON, Frédéric	Édouard-Montpetit
	MATUSZKIEWICZ, Martin	Stanislas
	PLOURDE, Jean-François	Mérici
	MORALES, Rodrigo	de Rosemont
	LAM, Patrick	Marianopolis
	SMITH, Adam	Jean-de-Brébeuf