Concours mathématique de l'AMQ (1996) ordre secondaire

Le jeudi, 8 février 1996, de 14:00 - 17:00

Le concours mathématique du Québec n'est pas un examen. Il vise à déceler les meilleurs talents en mathématiques parmi la population étudiante. Pour permettre à ces grands talents de se détacher nettement de la masse des autres, le questionnaire est abondant et varié: plusieurs genres de questions et divers degrés de difficulté.

Nous avons décidé de revenir cette année à la tradition des huit questions, au lieu des sept des dernières années, et d'en proposer de moins difficiles. Tout de même, qu'un étudiant ne se décourage pas s'il n'arrive pas à répondre à plus de deux ou trois questions. Les auteurs du questionnaire s'attendent à ce que les bons étudiants fournissent quatre ou cinq bonnes réponses. Ils seront bien embarrassés si plusieurs arrivent à en donner huit: à qui accorder le premier prix et, surtout, qui sélectionner pour représenter le Québec à l'Olympiade canadienne de mathématiques?

Questions

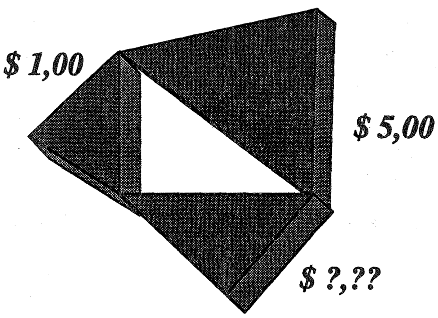
1. La somme du paresseux

Pour punir Jean de sa paresse, son professeur lui impose de calculer la somme des chiffres qui apparaissent dans les entiers 1, 2, 3, ... , 9999. Le professeur avait lui-même passé plusieurs heures à faire ce calcul. Mais Jean n'est pas seulement paresseux, il est aussi ingénieux. Il a trouvé une façon d'arriver à la bonne réponse en quelques secondes.

Trouvez, vous aussi, mais sans que ce soit une punition, cette réponse en quelques secondes!

2. Les chocolats de la Saint-Valentin

Dans la vitrine d'une chocolaterie, Bram aperçoit l'annonce de jolis chocolats en forme de triangles équilatéraux, disposés autour d'un triangle rectangle, comme dans la figure ci-contre. Les prix du plus grand triangle et du plus petit sont indiqués. Si l'épaisseur de chocolat est uniforme et les prix sont proportionnels à la quantité de chocolat, quel est le prix du troisième triangle?



Cette figure n'est pas à l'échelle.

3. Cinquante-cinq sottises

Marie-Jeanne se passionne pour l'astronomie et les mathématiques. Son petit frère préfère l'astrologie! Pour se moquer de lui, elle a composé le problème suivant:

$$\begin{array}{ccccccccc} & S & O & T & T & I & S & E & S \\ & \times & 5 & 5 & & & & & \\ \hline H & O & R & O & S & C & O & P & E \end{array}$$

Dans cet alphamétique, chaque lettre représente un chiffre différent entre 0 et 9, et S n'est pas zéro. Trouvez la solution, qui est unique.

4. Les simplifications douteuses

Dans un article qu'il ne faut pas prendre au sérieux, la sérieuse revue Science et Vie (décembre 1995, pp. 138-139) donne une «méthode nouvelle» pour simplifier les fractions. Il s'agit de biffer les chiffres qui apparaissent à la fois au numérateur et au dénominateur. Par exemple, $\frac{151}{5134} = \frac{1}{34}$ et $\frac{833}{3332} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

Trouvez toutes les fractions entre 0 et 1 dont le dénominateur est inférieur à 100 et qui se simplifient correctement par cette méthode douteuse.

5. Beaucoup de travail pour trois litres

Un baril est rempli d'eau. On en vide la moitié, et on ajoute un litre d'eau. Après avoir effectué cette opération sept fois, il en reste trois litres. Combien y avait-il d'eau dans le baril au départ?

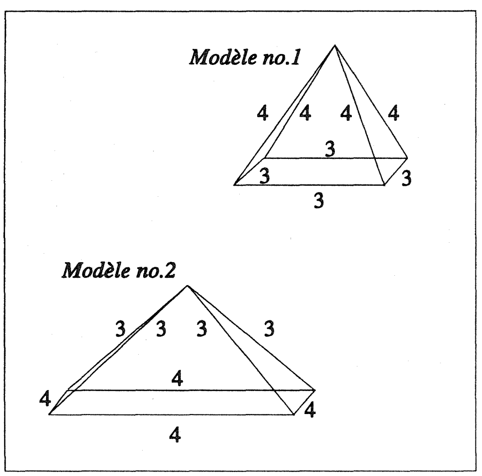
6. La moto aquatique

Gilbert mène toujours sa nouvelle moto aquatique à pleine vitesse. Par prudence, il l'a d'abord essayée sur un lac, où il n'y a pas de courant. Mais le vrai sport, dit-il, c'est de braver une rivière à fort courant.

À contre-courant, il parcourt une certaine distance en 28 minutes. Avec le courant, la même distance lui prend 3 minutes de moins que sans courant. Combien de temps lui faut-il pour parcourir la distance avec le courant?

7. La tente la plus spacieuse

Un manufacturier de matériel de camping produit deux modèles de tentes pyramidales à base carrée, consolidées par huit tiges de métal: quatre tiges de 3 mètres et quatre tiges de 4 mètres.



Dans le modèle No 1, les tiges de 3 mètres forment les côtés de la base et celles de 4 mètres sont placées obliquement. Dans le modèle No 2, le rôle des tiges est inversé: celles de 4 mètres sont à la base et celles de 3 mètres sont placées obliquement.

Montrer par calcul qu'une tente de modèle No 1 est plus spacieuse qu'une tente de modèle No 2. **Aide:** Le volume d'une pyramide est égal au tiers de l'aire de sa base, multiplié par sa hauteur.

8. Triangle ou quadrilatère

Sur une feuille de papier carrée de 1 mètre de côté, Matthieu place 18 points. Parmi ces points, il n'y en a pas trois qui sont alignés. Il joint tous ces points deux à deux par des segments de droite. Sur chacun de ces segments, il inscrit sa longueur en centimètres, en arrondissant à l'entier le plus près. Aucun de ces segments ne mesure moins d'un centimètre. Montrez que, à ces approximations près, Matthieu aura nécessairement dessiné un triangle isocèle ou un quadrilatère dont deux côtés opposés sont égaux.

Solutionnaire

1. La somme du paresseux

On considère les paires

$$\begin{gathered}0,\ 9999,\\ 1,\ 9998,\\ 2,\ 9997,\\ \dots\\ 4997,\ 5002,\\ 4998,\ 5001,\\ 4999,\ 5000.\end{gathered}$$

Dans chacune de ces 5000 paires, la somme des chiffres est 36. La somme de tous les chiffres est donc

$$5000 \times 36 = 180000.$$

2. Les chocolats de la Saint-Valentin

L'aire d'un triangle équilatéral est proportionnelle au carré de son côté. Le triangle du centre étant rectangle, le théorème de Pythagore nous indique que l'aire du triangle de 5,00 $ est égale à la somme des aires des deux autres triangles. Comme l'épaisseur de chocolat est uniforme et les prix sont proportionnels à la quantité de chocolat, le prix cherché est simplement 5,00 $ moins 1,00 $, soit 4,00 $.

3. Cinquante-cinq sottises

Puisque *sottises* compte 8 lettres et *horoscope* 9, on a $s < 2$. Puisque $s \neq 0$, on a $s = 1$. Comme *sottises*, qui termine par 1, multiplié par 55, donne *horoscope*, ıi se termine par e, on a $e = 5$. On a maintenant ; trois derniers chiffres de *sottises* qui, multipliés ır 55, nous donneront les trois derniers chiffres de ›roscope. Ainsi, puisque $151 \times 55 = 8305$, on trouve $= 0$ et $o = 3$.

yant les deux premiers chiffres de *sottises*, on trouve sément $h = 7$.

es chiffres encore disponibles sont 2, 4, 6, 8 et 9. Si $= 6$, on trouve (en faisant $sott \times 55$, i.e. $1366 \times 55 =$ 5130), $o = 5$, contredisant $o = 3$. On a donc $t = 2$ ou . Mais, par le même calcul ($sott \times 55$), $t = 2$ entraîne $= 7$, et cette valeur est déjà attribuée à h. Il ne reste ue $t = 4$. Puisque $sott \times 55 = 1344 \times 55 = 73920$, on n déduit que $r = 9$.

›n en est donc à $1344i515 \times 55 = 73931c305$. En ffectuant la division de $73931c305$ par $1344i515$, on n vient nécessairement à la conclusion que $i = 2$, et, n multipliant $sottises = 13442515 \times 55$, on trouve $: = 8$. Nous avons maintenant la solution complète: $\imath = 0$, $s = 1$, $i = 2$, $o = 3$, $t = 4$, $e = 5$, $h = 7$, $c = 8$:t $r = 9$, de sorte que le produit est $13442515 \times 55 =$ '39318305.

4. Les simplifications douteuses

Dutre les solutions évidentes de la forme $\frac{AA}{AA} = \frac{1}{1}$ ›u $\frac{A0}{B0} = \frac{A}{B}$, on recherche les fractions de la forme $\frac{BA}{AC} = \frac{B}{C}$, où A, B et C sont des entiers de 1 à 9. Cette forme $\frac{BA}{AC} = \frac{B}{C}$ contient les mêmes solutions que la forme $\frac{AC}{BA} = \frac{C}{B}$, sauf qu'elles sont renversées. On cherche donc les solutions à

$$\frac{10B + A}{10A + C} = \frac{B}{C}.$$

Après simplification, on obtient

$$9BC + AC = 10AB$$

qui peut aussi s'écrire

$$A(C - B) = 9B(A - C) \qquad (1)$$

Ici, avec C et B choisis entre 1 et 9, on ne peut avoir $(C - B) = 9$. Comme le membre de droite est divisible par 9, on doit nécessairement avoir $A = 3$, 6 ou 9.

1^er^ cas: $A = 3$
L'équation (1) devient alors

$$C(1 + 3B) = 10B$$

qui n'a de solution que pour $B = 3$ et $C = 3$, ce qui correspond à la solution triviale $\frac{33}{33} = \frac{1}{1}$ déjà mentionnée.

2^e^ cas: A = 6
L'équation (1) devient alors

$$C(2 + 3B) = 20B$$

qui admet deux solutions, $B = 1$, $C = 4$, correspondant à $\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$ et $B = 2$, $C = 5$, correspondant à $\frac{26}{65} = \frac{2}{5}$.

3^e^ cas: A = 9
L'équation 1 devient alors

$$C(1 + B) = 10B$$

qui admet également deux solutions, données par $B = 1$, $C = 5$, soit $\frac{19}{95} = \frac{1}{5}$ et $B = 4$, $C = 8$, soit $\frac{49}{98} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Les quatres solutions non triviales sont donc $\frac{26}{65}$, $\frac{16}{64}$, $\frac{19}{95}$ et $\frac{49}{98}$.

5. Beaucoup de travail pour trois litres

Si on désigne par x_0 la quantité d'eau initiale, en litres, x_1 la quantité après une opération, x_2 la quantité après deux opérations, etc., le problème revient à déterminer x_0 sachant que $x_7 = 3$ et que, pour $n = 0, 1, \ldots, 6$,

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + 1$$

Ici, il est commode d'aller à reculons, i.e. que sachant que, pour $n = 0, 1, \ldots, 6$,

$$x_n = 2x_{n+1} - 2$$

on trouve successivement

$$x_6 = 2 \times 3 - 2 = 4$$

$$x_5 = 2 \times 4 - 2 = 6$$
$$x_4 = 2 \times 6 - 2 = 10$$
$$x_3 = 2 \times 10 - 2 = 18$$
et ainsi de suite jusqu'à $x_0 = 130$.

6. La moto aquatique

Soit v la vitesse de Gilbert et soit c la vitesse du courant. Soit d la distance donnée et soit t le temps en minutes. Comme $v = \frac{d}{t}$, on a $t = \frac{d}{v}$ et

$$28 = \frac{d}{v-c} \Rightarrow d = 28(v-c). \qquad (1)$$

La deuxième information peut s'écrire

$$\frac{d}{v} - \frac{d}{v+c} = 3. \qquad (2)$$

On remplace d par sa valeur en (1). Alors (2) devient

$$\frac{28(v-c)}{v} - \frac{28(v-c)}{v+c} = 3.$$

ou

$$28(v-c)(v+c) - 28v(v-c) = 3v(v+c)$$

ou

$$3\left(\frac{v}{c}\right)^2 - 25\frac{v}{c} + 28 = \left[3\frac{v}{c} - 4\right]\left[\frac{v}{c} - 7\right] = 0$$

On obtient donc deux solutions: $\frac{v}{c} = \frac{4}{3}$ et $\frac{v}{c} = 7$.

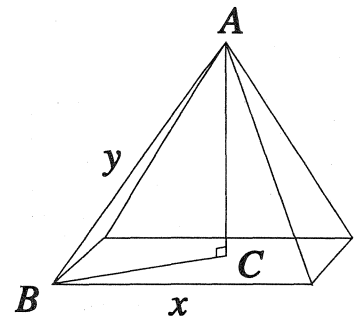
Si $\frac{v}{c} = \frac{4}{3}$, alors $c = \frac{3v}{4}$ et on a, en vertu de (1),

$$\frac{d}{v+c} = \frac{28\left(v - \frac{3v}{4}\right)}{v + \frac{3v}{4}} = \frac{28\left(\frac{1}{4}\right)}{\frac{7}{4}} = 4 \text{ minutes.}$$

Si $\frac{v}{c} = 7$, alors $c = \frac{v}{7}$ et on a

$$\frac{d}{v+c} = \frac{28\left(v - \frac{v}{7}\right)}{v + \frac{v}{7}} = \frac{28\left(\frac{6}{7}\right)}{\frac{8}{7}} = 21 \text{ minutes.}$$

Il y a donc deux solutions possibles au problème: 4 minutes et 21 minutes. Dans le premier cas, la vitesse de Gilbert est 4/3 de celle du courant. Dans le second, Gilbert va 7 fois plus vite que le courant.



7. La tente la plus spacieuse

Considérons une pyramide carrée de sommet A, dont les arêtes de la base sont de longueur x et dont les arêtes latérales sont de longueur y. Soit C le pied de la hauteur abaissée de A et soit B un des sommets de la base. Alors

$$\overline{BC} = \frac{x}{\sqrt{2}},\ \overline{AB} = y,\ \overline{AC} = hauteur = \sqrt{y^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}$$

Donc

$$\overline{AC} = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{2}}.$$

Le volume de la pyramide est

$$\frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{2}}.$$

Si $x = 3$, $y = 4$, on trouve $Vol. = \frac{3}{2}\sqrt{46}$. Si $x = 4$, $y = 3$, on trouve $Vol. = \frac{16}{3}$. Or $\frac{3}{2}\sqrt{46} > \frac{16}{3}$.

8. Triangle ou quadrilatère

La plus grande longueur qu'on puisse trouver dans le carré de 1 m par 1 m est sa diagonale, qui mesure 141 cm ($100\sqrt{2}$ cm, arrondis à l'entier le plus près). Puisque la distance 0 n'est pas possible, il y a au plus 141 longueurs différentes. Or on sait que n points distincts engendrent $(n(n-1))/2$ segments différents. Avec $n = 18$, on a donc $(18 \times 17)/2 = 153$ segments. Au moins deux, P_1P_2 et Q_1Q_2 ont donc même longueur. Si les quatre extrémités P_1, P_2, Q_1 et Q_2 sont toutes différentes, alors nous obtenons un quadrilatère ayant les propriétés voulues. Si, par exemple, $P_1 = Q_1$, alors $P_1P_2Q_2$ est un triangle isocèle.

La liste des gagnant(es) de ce concours se trouve à la page 4.