Jeux et problèmes

Jean-Marie Labrie

Cette chronique commence sa 14e année d'existence. Si elle a duré et si elle dure encore, c'est grâce à vous tous et toutes qui êtes des amateurs et adeptes fervents de jeux, de problèmes et d'activités mathématiques de toutes sortes. Oui, grâce à vous qui l'avez alimentée régulièrement par vos suggestions, vos encouragements et surtout par vos solutions, j'ai trouvé la force et l'amour de poursuivre sans relâche. Merci à vous et au Comité de rédaction de votre appui et de votre intérêt.

Dans ce numéro, vous trouverez quatre nouveaux jeux et problèmes qui sont proposés par un fidèle correspondant, Monsieur Charles-É. Jean qui a écrit une brochure, intitulé *Au jeu!* (problèmes 146, 147 et 148) et par Monsieur Matthieu Dufour, jeune étudiant de l'Université de Montréal (problème 149); je les remercie pour leur généreuse collaboration. Je profite de l'occasion de vous inviter tous et toutes à m'écrire; je l'apprécie grandement.

Dans le nouveau programme d'études du M.É.Q., il est régulièrement question de la méthodologie de la résolution de problèmes. Par exemple, dans le fascicule *Mathématique 314*, on énonce plusieurs objectifs terminaux en commençant par: *Résoudre des problèmes.* Nous ne pouvons plus ignorer que le ministère de l'Éducation du Québec met l'accent sur le processus de résolution de problèmes à toutes les étapes de l'apprentissage d'une notion mathématique. À la page 13 du programme Mathématique 314, il est clairement dit que:

> «*La résolution de problèmes constitue une trame de fond de l'enseignement de plusieurs programmes de formation générale et fait partie intégrante de toute l'activité mathématique. La résolution de problèmes n'est pas un thème distinct, mais un processus qui doit imprégner le programme tout entier et qui fournit le contexte propice à l'apprentissage des concepts mathématiques et à l'acquisition d'habilités intellectuelles.*»

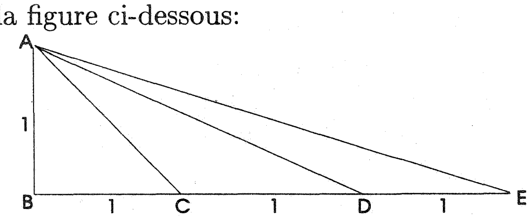
Avant de donner les solutions des problèmes proposés dans le numéro de décembre 1995, je fais un rappel sur la première étape à franchir en résolution de problèmes. Personne ne peut y échapper. Il est très important, en effet, de bien lire l'énoncé d'un problème avant d'utiliser toute stratégie. Ce qui suppose que nous comprenons tous les termes importants et que nous avons mis en évidence ce qui est demandé. Par exemple, dans le problème 145 de la page 27 (Bulletin AMQ, décembre 1995), on peut oublier facilement le terme *moyenne* dans l'expression *valeur moyenne.* Si on ne prête pas attention à ce mot, on peut s'enfarger dans une stratégie non appropriée.

Notez que nous attendrons encore avant de publier une solution de l'alphamétique du problème 143. Même si les nombres cherchés sont des multiples de 13, ne soyez pas «superficieux». Que les mordus s'y attaquent!

1. Solutions suggérées pour les problèmes 141, 142, 144 et 145 du numéro de décembre 1995 du Bulletin AMQ

Problème 141 : Thalès et nombres irrationnels

Soit la figure ci-dessous:



1. Montrer que les triangles ACD et EAC sont semblables.
2. Déterminer le rapport de similitude.
3. Le point A est-il un centre d'homothétie?

Solution suggérée

1. Les deux triangles ACD et EAC sont semblables car les trois côtés des deux triangles sont respectivement proportionnels:

$$\overline{AC} : \overline{CE} = \overline{CD} : \overline{AC} = \overline{DA} : \overline{CE}$$

Pour le triangle ACD, on a les mesures suivantes:

$$m(\overline{AC}) = \sqrt{2};\ m(\overline{CD}) = 1 \text{ et } m(\overline{DA}) = \sqrt{5}$$

Pour le triangle EAC, on a les mesures suivantes:

$$m(\overline{CE}) = 2;\ m(\overline{AC}) = \sqrt{2} \text{ et } m(\overline{AE}) = \sqrt{10}$$

2. Le rapport de similitude est donc $\sqrt{2}$.
3. Il n'existe aucun point d'homothétie, car la similitude n'est pas une homothétie.

Problème 142 : À l'aube de l'an 2 000

Si $A = 2000^{2000} + 2000^{-2000}$ et
si $B = 2000^{2000} - 2000^{-2000}$, calculer $A^2 - B^2$

Solution suggérée par Monsieur Donald Violette, de l'Université de Moncton

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= (A+B)(A-B) \\ &= (2 \times 2000^{2000})(2 \times 2000^{-2000}) \\ &= 4 \times 2000^{2000-2000} \\ &= 4 \times 2000^0 \\ &= 4 \times 1 = 4 \end{aligned}$$

Problème 144 : Fausse monnaie!

On donne 20 pièces de monnaie. Certaines sont fausses et d'autres sont bonnes. Si une pièce est bonne, elle pèse au moins 11 g et au plus 11,1 g. Si elle est fausse, elle pèse au moins 10,6 g et au plus 10,7 g. En 15 pesées sur une petite balance de précision, déterminer lesquelles sont bonnes et lesquelles sont fausses. Problème tiré de l'ouvrage *Jeux d'esprit et énigmes mathématiques* de D. Shasha, Éd. Odile Jacob, Paris p. 112.

Solution suggérée

On calcule le poids de 4 pièces en trois pesées. Ainsi, on peut peser la totalité des 20 pièces en 15 pesées. Soit A, B, C et D les 4 pièces à peser.

1. Pesons A, B et C.
   a. Si les trois sont fausses, elles pèsent de 31,8 g à 32,1 g.
   b. Si deux des 3 sont fausses, le poids sera de 32 g à 32,5 g.
   c. Si l'un des 3 est fausse, le poids sera de 32,6 g à 32,9 g.
   d. Si les trois sont bonnes, leur poids sera de 33 g à 33,3 g.
2. Si les trois sont bonnes ou fausses, il suffit de peser D et l'opération est limitée à deux pesées.
3. Sinon, on pèse A et D, puis on pèse B et D. Chacune de ces 2 pesées dit
   - si les deux pesées sont fausses (le poids sera de 21,2 g à 21,4 g) ou
   - si l'une est fausse et l'autre bonne (de 21,6 g à 21,8 g) ou
   - si les deux sont bonnes (de 22 g à 22,2 g).
4. Si l'une ou l'autre paire est constituée de 2 bonnes ou de 2 fausses, il et facile de déterminer tous les poids.
   Exemple:
   a. Si B et D sont bonnes, alors en pesant A et D, s'il y a une fausse, c'est nécessairement A.
   b. Si A, B et C comprennent deux pièces fausses, C est une pièce fausse.
5. Si A et D comprennent une bonne et une fausse pièce, comme B et D, alors on a les deux cas suivants:
   a. Si A, B et C comprennent deux bonnes pièces, alors D est une pièce fausse et les pièces A et B sont bonnes.
   b. Si A, B et C comprennent deux fausses pièces, alors D est une pièce bonne et les pièces A te B sont fausses.

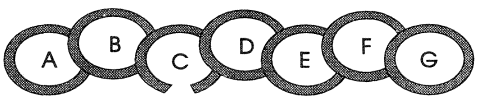
2. Nouveaux jeux et problèmes

Problème 146 : Trois entiers naturels (Charles-É. Jean)

En utilisant trois entiers naturels consécutifs supérieurs à 4, chacun pris une et une seule fois, et en ppliquant au choix deux des quatre opérations fonlamentales (+, -, × et ÷), combien peut-on représener d'entiers naturels différents? En dresser une liste omplète.

?roblème 147 : Les chaînons (Charles-É. Jean)

\ndrée a sectionné le 3^e maillon d'une chaîne de 7. Elle peut ainsi obtenir successivement 1, 2, 3, 4, 5, 6 t 7 maillons. En voici l'illustration:



1 maillon: C — 2 maillons: A, B

3 maillons: A, B, C — 4 maillons: D à G

5 maillons: C à G — 6 maillons: tous sauf C

7 maillons: tous

Trouver le nombre maximum m devant former une haîne dont cinq maillons sont sectionnés pour obtenir uccessivement de 1 à m maillons.

Problème 148 : Une équation (Charles-É. Jean)

Soit x, y et z des entiers naturels. Trouver une ou des ormules qui vont permettre de résoudre l'équation $x^2 - xy + y^2 = z^3$.

Problème 149 : Un alphamétique (Matthieu Dufour)

Résoudre l'alphamétique suivant en sachant que la ettre O correspond à 3:

$$\text{BIZARRE} \times \text{O} = \text{ETRANGE}.$$

Problème 150 : La fameuse suite de Fibonacci

Soit la suite de Fibonacci:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Si f_n représente le nombre de Fibonacci de rang n, trouver une expression simple dans chacun des cas suivants:

1. a. ${f_1}^2 + {f_2}^2 + \ldots + {f_n}^2$
   b. $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$
   c. $f_2 + f_4 + \ldots + f_{2n}$
   d. $f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n-1}$
2. Montrer que la somme de dix nombres consécutifs de la suite de Fibonacci est égale au produit du 7^e nombre de cette suite et de 11.
3. Où sont situés les nombres de Fibonacci dans le triangle de Pascal?

Veuillez adresser toute correspondance à :
Jean-Marie Labrie
Faculté d'éducation (DEPP)
Université de Sherbrooke
Sherbrooke (Québec), J1K 2R1
Télécopieur: (819) 821-8048