Jeux et problèmes

Jean-Marie Labrie

a dernière chronique (celle de mai 1995) a été consa- :ée à quelques «anciens» problèmes. Dans le Bulle- n AMQ de décembre 1994, nous avions proposé cinq ıux et problèmes (131 à 135), dont les solutions se- ɔnt données ici. Dans ce numéro, vous lirez un article e Monsieur Maurice Brisebois qui a été inspiré et mo- vé par l'un des problèmes déjà proposés: le problème e Lucie. Ce type de réaction d'un des lecteurs me sti- ıule. De plus, plusieurs professeurs du secondaire et u collégial m'écrivent et m'encouragent à poursuivre ǝtte chronique.

.ujourd'hui, je veux particulièrement remercier Mon- eur Jacques Sormany, fidèle lecteur, pour ses com- ıentaires et les solutions de deux problèmes.

. Solutions aux problèmes 131 à 135 du Bulletin AMQ de décembre 1994

'roblème 131 : Quelques triangles particuliers!

'rouver tous les triangles isocèles dont les mesures es angles sont données à l'aide de deux chiffres seu- ment.

olution suggérée

1. Il y a quatre triangles obtusangles: (41, 41, 98) (42, 42, 96) (43, 43, 94) (44, 44, 92)
2. Il y a un seul triangle rectangle: (45, 45, 90)
3. Il y a quarante-quatre triangles acutangles: (46, 46, 88) (47, 47, 86) ...(88, 88, 4) (89, 89, 2)

rand total de quarante-neuf triangles isocèles.

'roblème 132 : Peut-on généraliser le théorème e Van Aubel?

uand on dessine vers l'extérieur un carré à partir de ıaque côté d'un quadrilatère convexe et qu'on réunit, par des segments de droite, les centres des carrés opposés, les deux segments de droite ainsi obtenus sont congruents et se coupent à angles droits.

Solutions suggérées

Nous n'avons pas encore reçu d'illustrations ou de représentations de ce théorème assez remarquable.

Nous aimerions recevoir des démonstrations de cette propriété. Dans cet article, nous donnerons quelques exemples d'illustrations de ce théorème dans les cas suivants:

1. Le quadrilatère initial est convexe. Voir la figure 1.

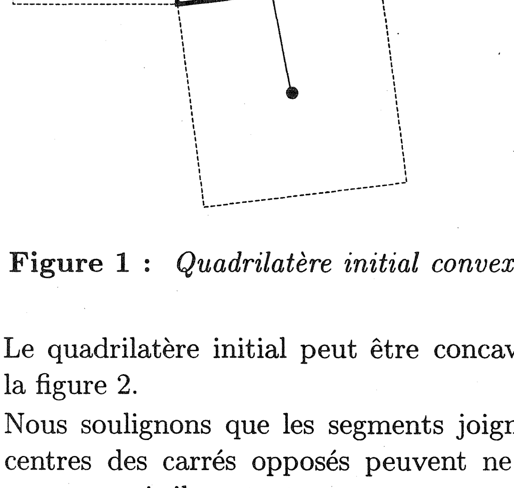

Figure 1 : *Quadrilatère initial convexe*

2. Le quadrilatère initial peut être concave. Voir la figure 2.
   Nous soulignons que les segments joignant les centres des carrés opposés peuvent ne pas se couper; mais ils restent congruents et perpendiculaires. Ce n'est pas le cas ici.

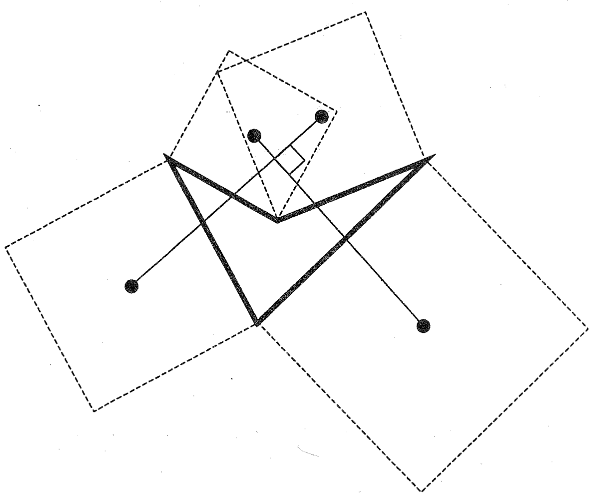

Figure 2 : *Quadrilatère initial concave*

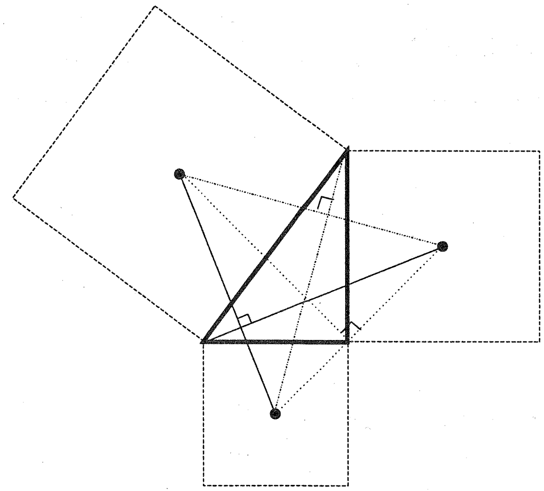

Figure 3 : *Théorème appliqué à un triangle*

3. Dans la figure 3, nous appliquons le théorème à un triangle. Il n'y a que trois carrés et nous pouvons avoir trois paires de segments congruents.
4. Dans la figure 4, nous avons appliqué le théorème à un segment de droite ayant deux points choisis à l'intérieur du segment. Est-ce toujours vrai? Sinon, quelle est la condition suffisante?
5. Dans la figure 5, il y a seulement un point à l'intérieur du segment.

Problème 133 : Choix de deux triangles!

Trouver, s'ils existent, deux triangles qui ne sont pas congruents, mais qui ont les trois angles congruents et deux côtés congruents.

Solution suggérée par Monsieur Jacques Sormany

Pour que deux triangles de côtés a, b, c et b, c et d soient semblables avec $a \neq d$, il faut qu'on ait la double proportion suivante:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}.$$

Donc, les nombres a, b, c et d sont proportionnels à x^n, $x^{n-1}y$, $x^{n-2}y^2$ et $x^{n-3}y^3$.

La condition énoncée ci-dessus est nécessaire mais non suffisante. Il faut ajouter que l'inégalité triangulaire fondamentale doit être satisfaite; on peut l'énoncer comme suit:

(1) $x + y < z$ et (2) $y - x < z$ pour tout (x, y, z).

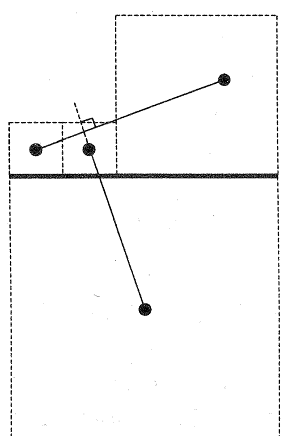

Figure 4 : *Théorème appliqué à un segment de droite*

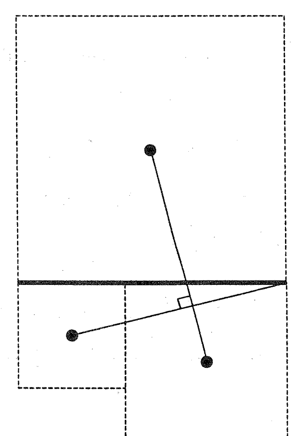

Figure 5 : *Un seul point à l'intérieur du segment*

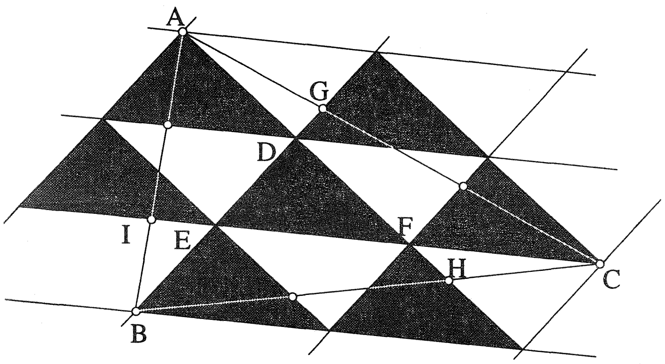

Figure 6 : *Le «puzzle de Mikuzinski»*

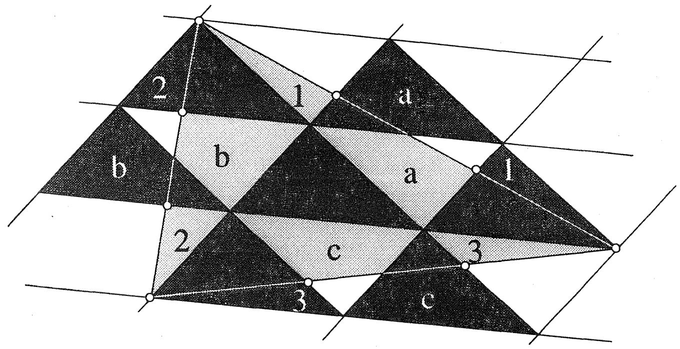

Figure 7 : *La reconstitution de la surface*

'ar exemple, 1, 2 et 4 et 2, 4 et 8 ne sont pas des ›lutions. En effet, ces mesures ne correspondent pas celles des côtés d'un triangle:

l) $4-1<2$ Faux;   (2) $1+2>4$ Faux
l) $8-2<4$ Faux;   (2) $2+4>8$ Faux

es triplets $(27, 45, 75)$ et $(45, 75, 125)$ sont à rejeter our les mêmes raisons.

'inégalité du triangle peut s'énoncer comme suit:

$$\text{Si } x<y, \text{ on doit avoir}$$
$$xy>(y-x)(y+x) \quad \text{ou} \quad |y^2-x^2|<xy.$$

uestion complémentaire: De tels triangles peuvent-s être rectangles?

.éponse: Oui, mais les mesures des côtés de tels tri-ngles ne sont pas des nombres entiers. Une solution st:

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}; 1; \sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}-1}}\right).$$

'e qui donne les valeurs approchées suivantes: (0,618; ,786; 1; 1,272).

'roblème 134 : Un triangle partagé en sept cal-ulables

oit un triangle quelconque ABC. Choisir, sur chaque ›té, un point situé au tiers. Les trois segments de roite qui joignent un sommet du triangle à l'un de ces points du côté opposé découpent le triangle en sept régions. Déterminer l'aire de chacune des sept régions.

Solution suggérée

Soit la figure 6, souvent considérée comme le «puzzle de Mikuzinski».

Dans ce puzzle, le point G est au tiers de AC, le point I au tiers de AB et le point H au tiers de BC. Le triangle DEF, à l'intérieur du grand triangle ABC, est formé des trois segments de droite BG, AH et CI. Tous les autres triangles ombragés sont congruents au triangle DEF. Dans la figure 7, la surface complémentaire de celle du triangle DEF se décompose en douze régions avec lesquelles on peut reconstituer les surfaces des six triangles en gris pâle.

On observe que l'aire du triangle ABC est égale à sept fois l'aire du triangle DEF.

Montrer que l'aire de chacun des triangles 1, 2 et 3 est égale à 1/21 de l'aire du grand triangle ABC et que l'aire de chacun des quadrilatères a, b et c est égale à 5/21 de l'aire du grand triangle ABC.

Problème 135 : Le ciré d'Éric!

Ciré d'Éric est une marque de vêtement, maintenant rendue célèbre. Cette marque, en effet, peut se lire dans les deux sens. On raconte que l'un des vendeurs de vêtements, fort en mathématiques sûrement et amateur de jeux mathématiques, s'ennuyait au travail. Il s'est mis à inventer des jeux. Un jour, il inventa un cryptogramme numérique génial. Il a écrit cette marque de vêtement sous la forme de la multiplication suivante:

```
CIRÉ
× D
ÉRIC
```

Est-il possible de remplacer chaque lettre par l'un des chiffres pour obtenir un produit exact? Y a-t-il plusieurs solutions?

Solution suggérée par Monsieur Jacques Sormany

Voici quelques conditions préalables:

1. $E \geq D \times C$ ou $E > D$ et $E > C$.
2. $D \neq 0$ ou 1.

Par conséquent, on a: $2 \leq D \leq 8$. C doit être 1, 2, 3 ou 4 pour avoir $E \leq 9$.

1re étape: Soit $D = 2$. C est pair. $C \neq 2$ car $C \neq D$.
Si $C = 4$, on a:
$E = 2$, impossible car $E \neq D$;
$E = 7$, impossible car $D \times C = 8$.

Donc pas de solution avec $D = 2$.

2e étape: Soit $D = 3$. C peut être égal à 1, 2 ou 4.

Si $C = 1$, on doit avoir $E = 7$; $7 \times 3 = 21$, non.
Si $C = 2$, on doit avoir $E = 4$; $4 \times 3 = 12$, non.
Si $C = 4$, on doit avoir $E = 8$; $8 \times 3 = 24$, non.

Donc pas de solution avec $D = 3$.

3e étape: Soit $D = 4$. C est pair. $C = 2$ et $E = 8$.

C'est une solution et c'est la seule.

Avec $D = 5$, 6, 7 ou 8, C doit être 1 et ce n'est pas possible.

Donc

```
2178
× 4
8712
```

N.B. Dans le numéro 44 de la revue Tangente, à la page 16, on a appelé les nombres 2178 et 8712 des nombres «miroirs».

2. Nouveaux jeux et problèmes

Problème 136 : Sans la priorité des opérations

À partir du nombre 20 017, retrouver ce nombre en utilisant une et une seule fois les quatre opérations élémentaires et une et une seule fois chacun des nombres suivants dans l'ordre: 37, 179, 53 et 831.

Problème 137 : Vaches boulimiques

Dans un enclos, deux vaches peuvent manger, en quatre semaines, tout le gazon de deux acres et tout le gazon qui peut pousser sur ce terrain pendant cette période de temps.

Dans un autre enclos, trois vaches aussi boulimiques peuvent manger, en deux semaines, tout le gazon de deux acres et tout le gazon qui peut pousser pendant cette période de temps.

Combien de vaches, ayant toujours le même appétit, sont nécessaires pour manger, en six semaines, tout le gazon de six acres et tout le gazon qui peut pousser dans cette période de temps?

N.B. Adaptation d'un problème publié dans *Mathematics Teacher*, Février 1986.

Problème 138 : Un jour, ce sera ton tour!

Y a-t-il plus de gagnants ou gagnantes à la Loto 6/49 qu'à la Super 7?

Problème 139 : Quelques nombres remarquables!

1. Mettre d'abord au carré chacun des nombres suivants: 32 043, 11 826 et 99 066.
2. Les trois carrés ont une propriété commune. Laquelle?

Problème 140 : Régularités et une progression arithmétique

Soit a, b, c et d quatre termes consécutifs d'une progression arithmétique.

- Comparer les deux expressions suivantes:

$$(d^2 - a^2) \text{ et } (c^2 - b^2).$$

- Montrer que l'expression $(d^2 + a^2 - b^2 - c^2)$ est un carré parfait.

Veuillez adresser toute correspondance à:
Jean-Marie Labrie
Faculté d'éducation (DEPP), Université de Sherbrooke
Sherbrooke (Québec), J1K 2R1
Télécopieur: (819) 821-8048