Un problème de partage

Francois Dubeau

L'idée de ce court article vient du problème suivant.

«Un fermier donne ses 19 vaches. Il donne la moitié de ses bêtes à son frère, le quart à son beau-frère et le cinquième à son cousin. Comme il a de la difficulté à faire le partage, il demande à son voisin de lui prêter une de ses vaches, en lui promettant de la lui remettre une fois le partage effectué. Comment est-ce possible?»

Le problème de partage est très simple. En fait, on doit diviser un entier $N = 19$ en $n = 3$ parties sachant qu'à chacune des parties est associée une proportion $p_i = \alpha_i/\beta_i$ (où α_i et β_i sont deux entiers et $i = 1, 2, 3$). Le problème ici est d'expliquer la méthode utilisée par le fermier et de répondre à la question «Comment est-ce possible?»

Le fermier fait appel au voisin car la somme p des proportions p_i $(i = 1, 2, 3)$ n'est pas égale à 1, ici $p_1 = 1/2$, $p_2 = 1/4$, $p_3 = 1/5$ et $p = 19/20$. Il fait intervenir le voisin en le considérant comme un quatrième «héritier» en lui assignant la proportion $p_4 = 1 - p = 1/20$. Il augmente alors le nombre de vaches de son troupeau en empruntant M vaches au voisin. Cet emprunt, fait au voisin, doit être exactement ce que le voisin recevra lors du partage du troupeau de $N + M$ vaches entre les quatre «héritiers» selon les proportions p_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Cette dernière observation conduit à l'équation

$$(N + M)(1 - p) = M$$

d'où

$$(N + M)p = N$$

et

$$M = N\frac{1 - p}{p}.$$

De plus, chacun des héritiers reçoit N_i vaches données par

$$N_i = (N + M)p_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

et donc

$$N_i = N\frac{p_i}{p}, \quad i = 1, \ldots, n$$

ce qui n'est autre chose qu'une simple règle de trois, que le fermier aurait pu utiliser directement.

Cherchons maintenant les conditions que doivent satisfaire l'entier N et les proportions $p_i = \alpha_i/\beta_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ pour que les nombres N_i soient tous des entiers. On suppose que pour chaque indice i les deux entiers α_i et β_i n'ont pas de facteur commun (on dit qu'ils sont relativement premiers). Notons β le plus petit entier positif divisible par chacun des β_i (β est le plus petit commun multiple des β_i) et posons $\beta = \gamma_i\beta_i$ où γ_i est un entier $(i = 1, \ldots, n)$. Comme

$$p = \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} \gamma_i\alpha_i,$$

posons $p = \alpha/\beta$ avec $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i\alpha_i$. Nous avons alors le résultat suivant:

Proposition *Les N_i $(i = 1, \ldots, n)$ sont tous des entiers si et seulement si α divise N.*

Démonstration. Si tous les $N_i = (N + M)(\alpha_i/\beta_i)$ sont des entiers alors chaque β_i divise $N + M$, puisque α_i et β_i sont relativement premiers. Il suit que β, le plus petit commun multiple des β_i, divise également $N + M$.

Mais comme $N = (N + M)(\alpha/\beta)$ et que $(N + M)/\beta$ est un entier, alors α divise N.

Inversement, si α divise N, alors on a $N + M = N\beta/\alpha$ et β divise $N + M$. il suit que chaque β_i divise $N + M$ et que $N_i = (N + M)(\alpha_i/\beta_i)$ est un entier. □

Si le voisin habite trop loin, un fermier plus pragmatique peut essayer de faire le partage directement

N	19	17	22	23	20	77	50
n	3	3	3	3	3	4	4
p_1	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
p_2	1/4	1/3	1/4	1/4	1/3	1/3	2/3
p_3	1/5	1/9	1/6	2/5	5/6	1/4	5/6
p_4	—	—	—	—	—	1/5	1/12
$p = \alpha/\beta$	19/20	17/18	11/12	23/20	10/6	77/60	25/12
$M = (\beta - \alpha)(N/\alpha)$	1	1	2	-3	-8	-17	-26
$N + M$	20	18	24	20	12	60	24
N_1	10	9	12	10	6	30	12
N_2	5	6	6	5	4	20	16
N_3	4	2	4	8	10	15	20
N_4	—	—	—	—	—	12	2

Tableau 1 : *Exemples*

en utilisant les proportions données. Il commence par donner Np_i vaches à l'héritier i ($i = 1, 2, 3$). Ce faisant non seulement se rend-il compte, à son grand désarroi, qu'il doit tuer une vache pour faire le partage mais que, fait encore plus troublant, il lui reste une partie d'une vache une fois le partage fait. Vachement intrigué, le fermier peut se demander à ce moment-ci s'il n'est pas en train d'assister à la multiplication des vaches (du déjà vu n'est-ce pas!). En fait, le fermier n'a distribué que Np vaches et il lui en reste $N(1-p)$ vaches. Prenant le taureau par les cornes, il décide alors de diviser ce qui reste dans les mêmes proportions et il redonne $N(1-p)p_i$ vaches à l'héritier i ($i = 1, 2, 3$). Comme il lui reste encore $N(1-p)^2$ vaches après ce second partage, il décide de continuer ce procédé indéfiniment (au risque d'y passer sa vie et de se tuer à l'ouvrage). Ainsi l'héritier i reçoit

$$N_i = \sum_{k=0}^{\infty} N(1-p)^k p_i$$

qui n'est pas autre chose qu'une série géométrique de raison $1 - p$. Mais

$$N_i = Np_i \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k$$

et si $|1 - p| < 1$, ou encore $0 < p < 2$, on a

$$\begin{aligned} N_i &= Np_i \frac{1}{1-(1-p)} \\ &= N\frac{p_i}{p} \quad \text{(oups! encore la règle de trois)} \end{aligned}$$

et en fait, il n'est pas nécessaire de tuer de vache si les N_i sont tous entiers.

Notons que la première méthode fonctionne pout tout $p > 0$ tandis qu'on peut utiliser la deuxième méthode seulement pour $0 < p < 2$ (même si le résultat final est valide pour tout $p > 0$).

Qu'en est-il de tout cela si le fermier a 23 vaches et qu'il en donne la moitié à son frère, le quart à son beau-frère et les deux cinquièmes à son cousin? Quel est le rôle du voisin dans ce cas? Ici le fermier demande à son voisin de s'occuper temporairement de trois de ses vaches ($M = -3$) qu'il viendra reprendre une fois le partage déterminé ($N_1 = 10$, $N_2 = 5$, $N_3 = 8$ avec $N + M = 20$).

Finalement, le tableau 1 présente quelques exemples afin d'illustrer différentes situations possibles.

Francois Dubeau
Département de mathématiques et d'informatique
Université de Sherbrooke