Jeux et problèmes

Jean-Marie Labrie

1. Introduction

Cette chronique termine sa douzième année d'existence. Madame Louise Trudel, présidente de l'AMQ d'alors, voulait inciter les membres de l'AMQ de toutes les régions du Québec à participer, à tour de rôle, à cette chronique. Elle voulait également que les membres intègrent cette méthodologie de problèmes dans leur enseignement de la mathématique.

Nous n'avons pas été les seuls à sensibiliser les enseignantes et enseignants de la mathématique à la résolution de problèmes. Dans la revue Envol (GRMS) et dans Instantanés Mathématiques (APAME), nous retrouvons les mêmes objectifs. De plus, les responsables du GRMS et de l'APAME ont organisé respectivement les concours Opti-Math et Mathématlon afin de montrer l'importance de la résolution de problèmes dans l'enseignement et dans la vie. À l'AMQ, de tels concours pour la fin du secondaire et le collégial existent depuis plus de trente ans. C'est Monsieur Roland Brossard qui en a eu l'idée; il avait observé qu'aux Olympiades mathématiques, très peu de canadiens français réussissaient à se classer parmi les premiers. Depuis, les étudiantes et étudiants du Québec représentent bien le Canada dans ces concours. Il ne faut pas oublier non plus que le Camp mathématique annuel pour les meilleurs lauréats et lauréates à ces concours n'est pas étranger au développement des mathématiques au Québec.

Je profite de cet anniversaire pour vous remercier, lecteurs et lectrices qui participez régulièrement à cette chronique en m'envoyant vos solutions, commentaires et suggestions. Sans votre encouragement et votre fidélité, cette chronique n'aurait pas connu cette pérennité. Je vous invite à m'écrire en tout temps. Il est bon de nous rappeler que, pour tout problème ou pour toute activité mathématique ou non, bien poser la situation est encore plus important que de la résoudre. La solution, en effet, est souvent déjà à moitié trouvée.

2. Solutions aux problèmes 126 à 130 du Bulletin AMQ d'octobre 1994

Problème 126 : Le jeu de dominos!

Le jeu de dominos existe depuis plus de 200 ans. Il comprend habituellement 28 plaquettes rectangulaires formées chacune de deux surfaces carrées sur lesquelles figurent toutes les paires de nombres de zéro à six.

1. Combien de fois chaque nombre apparaît-il dans le jeu?
2. Construire une représentation simple qui illustre les 28 plaquettes.
3. À l'aide de tous les dominos, tracer un chemin fermé de façon à ne pas emprunter la même ligne.

Solutions proposées

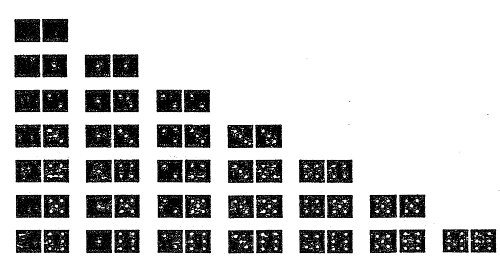

Figure 1 : *Les dominos sous forme triangulaire*

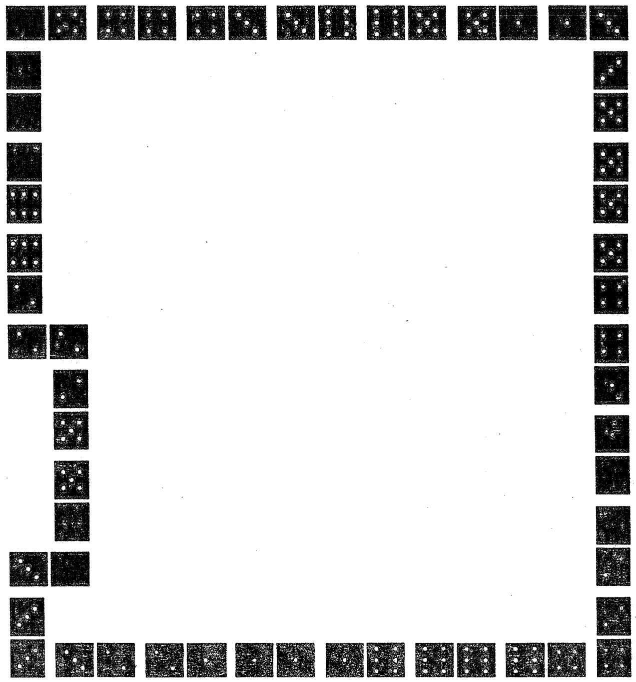

Figure 3 : *Exemple de chemin fermé*

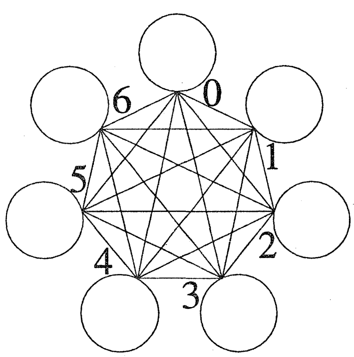

Figure 2 : *Graphe du jeu des dominos*

1. Chacun des nombres revient 8 fois; ce qui fait $7 \times 8 = 56$; par conséquent, le nombre de dominos est la moitié de 56.

2. Une bonne façon de représenter les dominos est de les placer sous une forme triangulaire comme le montre la figure 1.

3. L'un des plus vieux problèmes de l'analyse combinatoire avec le jeu des dominos consiste à déterminer le nombre de manières d'aligner un ensemble complet de dominos en suivant la règle traditionnelle: *les extrémités qui se touchent doivent correspondre à des nombres identiques.* L'ensemble est dit complet s'il contient tous les dominos du double blanc au double six. Ce problème est représenté par un graphe comme le montre la figure 2.

   On constate que cet ensemble standard de 28 dominos (du double zéro au double six) est représenté par un graphe dont les noeuds sont pairs. On peut donc tracer des chemins fermés sans emprunter deux fois la même ligne. Rappelons que 28 est à la fois un nombre parfait et un nombre triangulaire. Or, tout nombre triangulaire peut correspondre à un ensemble *complet* de dominos. Pour l'ensemble complet de 28 dominos, le nombre de chemins fermés, en comptant les inverses, est 7 959 229 931 520. Il est donc facile de trouver un cas de chemin fermé comme le montre la figure 3.

N.B. Pour plus de renseignements sur les dominos, consulter le volume de Martin Gardner: *Math' Circus* Édition Bélin, p.97-105.

Problème 127 : Carré magique 4×4 et dominos!

Le jeu consiste à compléter les cases vides à partir des dominos hors du carré, pris une et une seule fois (voir figure 4). La somme de chaque ligne horizontale, verticale et diagonale est égale à 14.

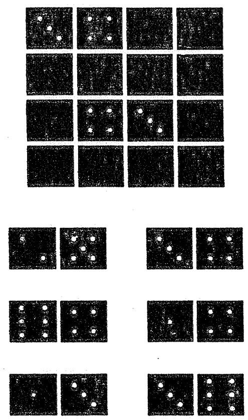

Figure 4 : *Carré magique et dominos*

Solution proposée

La figure 5 donne le résultat escompté.

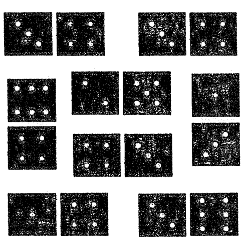

Figure 5 : *Solution au problème 127*

Problème 128: Une division à l'aide de nombres carrés!

Lucie connaît mieux les carrés d'entiers que la multiplication. Pour calculer 95 x 155, elle dessine une figure de forme rectangulaire dont les dimensions sont 95 mm et 155 mm. Elle trace d'abord le plus grand carré possible et fait de même dans chacun des rectangles qui restent. Elle obtient ainsi huit carrés.

1. Dessiner la figure construite par Lucie.
2. Représenter 95 x 155 par une somme de nombres carrés.

Solutions proposées

1. Une image réduite de la figure de Lucie est présentée à l'illustration 6.
2. Les dimensions des carrés de la figure de Lucie sont les suivantes:

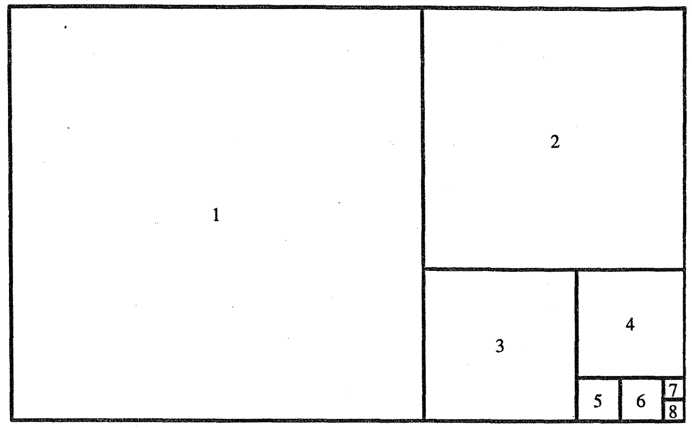

Figure 6 : *Figure de Lucie*

carré 1:	95 mm	×	95 mm
carré 2:	60 mm	×	60 mm
carré 3:	35 mm	×	35 mm
carré 4:	25 mm	×	25 mm
carré 5:	10 mm	×	10 mm
carré 6:	10 mm	×	10 mm
carré 7:	5 mm	×	5 mm
carré 8:	5 mm	×	5 mm

Donc, $95 \times 155 = 25 + 25 + 100 + 100 + 625 + 1225 + 3600 + 9025$.

Remarque: Existe-t-il toujours un nombre minimal de nombres carrés dont la somme donne l'aire d'un rectangle?

Problème 129 : Des 9 en abondance et l'an 2000 approche!

Quelle est la somme des chiffres du résultat de la multiplication $2000 \times 999\ldots999$? (Le 2e facteur contient 2 000 chiffres égaux à 9).

Solution proposée

Par régularité, on obtient: $2000 \times 9 = 18000$ et la somme est 9 ou 1×9 $2000 \times 99 = 198000$ et la somme est 18 ou 2×9 $2000 \times 999 = 1998000$ et la somme est 27 ou 3×9 $2000 \times 9999 = 19998000$ et la somme est 36 ou 4×9 etc...

Il suffit donc de multiplier 2 000 par 9 pour obtenir la solution car il y a deux mille «9» dans le 2e facteur.

Ce qui donne 18 000.

Problème 130 : Cauchemar d'un professeur de mathématiques!

Dans la revue Tangente, n° 36, p. 33 (mars-avril 1994) roposé le problème suivant:

Jn professeur de mathématiques a l'habi-:ude de donner à ses élèves des interro-gations écrites sous forme de grilles de 10 questions à choix multiple: vrai ou faux. Une réponse correcte donne 2 points et une réponse fausse enlève un point. L'élève peut aussi ne pas répondre (note inchan-gée). Les notes peuvent ainsi varier de -10 à 20. Or, la nuit dernière, le professeur a rêvé que tous ses élèves ont obtenu la note zéro à un interrogatoire, et ce, sans qu'il y ait deux grilles-réponses identiques. Combien le professeur a-t-il corrigé de co-pies au maximum cette nuit-là?

on proposée

Une première manière d'obtenir zéro consiste à ne répondre à aucune question. On a un seul cas.

Une deuxième manière consiste à avoir 2 fois plus de réponses incorrectes que de réponses correctes. Ce qui donne trois différentes:

(a) Avec une réponse correcte:

$$\binom{10}{1} \times \binom{9}{2} = 360 \text{ cas}$$

(b) Avec deux réponses correctes:

$$\binom{10}{2} \times \binom{8}{4} = 3150 \text{ cas}$$

(c) Avec trois réponses correctes:

$$\binom{10}{3} \times \binom{7}{6} = 840 \text{ cas}$$

onséquent, dans son rêve, ce professeur de ma-atiques a corrigé au maximum 4 351 copies.

Nouveaux jeux et problèmes

lème 131 : Quelques triangles particuliers!

ver tous les triangles isocèles dont les mesures ngles sont données à l'aide de deux chiffres seu-it.

Problème 132 : Peut-on généraliser le théorème de Van Aubel?

Quand on dessine vers l'extérieur un carré à partir de chaque côté d'un quadrilatère convexe et qu'on réunit par des segments les centres des carrés opposés, les deux segments ainsi obtenus sont congruents et se coupent à angles droits. N. B. Il serait intéressant de recevoir des illustrations de cette propriété dans de nombreuses situations.

Problème 133 : Choix de deux triangles!

Trouver, s'ils existent, deux triangles qui ne sont pas congruents mais qui ont les trois angles congruents et deux côtés congruents.

Problème 134 : Un triangle partagé en sept régions calculables!

Soit un triangle quelconque ABC. Choisir, sur chaque côté, un point situé au tiers. Les trois segments de droite qui joignent un sommet du triangle à l'un de ces points du côté opposé découpent le triangle en sept régions. Déterminer l'aire de chacune des 7 régions.

Problème 135 : Le ciré d'Éric!

Ciré d'Éric est une marque de vêtement, maintenant rendue célèbre. Cette marque, en effet, peut se lire dans les deux sens. On raconte que l'un des vendeurs de vêtements, fort en mathématiques sûrement et amateur de jeux mathématiques, s'ennuyait au travail. Il s'est mis à inventer des jeux. Il inventa un jour un cryptogramme numérique génial. Il a écrit cette marque de vêtement sous la forme d'une multiplication que voici:

$$\begin{array}{r} \text{CIRÉ} \\ \underline{\times \ \text{D}} \\ \text{ÉRIC} \end{array}$$

Est-il possible de remplacer chaque lettre par l'un des chiffres pour obtenir un produit exact? Y a-t-il plusieurs solutions?

Veuillez adresser toute correspondance à:
Jean-Marie Labrie
Université de Sherbrooke
Faculté d'éducation (DEPP)
Sherbrooke (Québec)
J1K 2R1