JEUX ET PROBLÈMES

Jean-Marie Labrie,
Université de Sherbrooke

Dans la méthodologie de la résolution de problèmes, le geste de compréhension est essentiel. Nul le conteste. Le geste de compréhension, en effet, suppose le projet de *donner du sens* à l'objet considéré qui est ici une activité mathématique.

Pour comprendre un problème, que font le jeune ou l'adulte?

Ils commencent par porter attention: ils regardent, ils lisent et relisent, ils écoutent ce qu'il évoque. Ensuite, ils confrontent l'évocation reçue ou construite à l'activité proposée. Finalement, ils font des comparaisons ou portent des jugements qui servent de tremplin au «sens» cherché dans le problème.

Quand on veut résoudre un problème, le geste de compréhension est avant tout un geste *d'application* en introduisant des stratégies ou en utilisant des outils opératoires. Ce qui peut exiger à la fois de l'imagination, de l'initiative et de la créativité.

En privilégiant la démarche inductive qui fait souvent appel à la méthode de «tâtonnement» pour trouver des lois à partir de cas particuliers, par exemple dans des activités de régularités, on sollicite davantage la compréhension basée sur les applications d'acquisitions préalables.

Il existe un autre type de compréhension basée sur les explications à donner. Il s'agit alors d'une démarche *déductive.* On demande d'expliquer ce qui a été trouvé. Après avoir trouvé la solution d'un problème, l'enseignant ou l'enseignante et l'élève ont à expliquer des résultats ou des solutions. C'est là un critère qui montre s'il y a compréhension de la situation ou de l'activité proposée.

En fait, l'apprentissage de notions mathématiques sera complet si on sait à la fois *appliquer* et *expliquer.* Dans la méthodologie de la résolution de problèmes, comprendre c'est donner du sens aux choses perçues en s'interrogeant, en sachant expliquer et en sachant appliquer.

En résolution de problèmes, il faut, en plus, de l'audace, la passion de vaincre, du courage, de la ténacité et le goût des défis. Au tout début, il faut passer au travers de petits défis. Dans cette chronique, il y a des activités pour tous les goûts.

Choisir pour mieux réussir. Bon succès!

1ère partie: Solutions des problèmes proposés du dernier numéro du Bulletin AMQ: octobre 1993, p. 51.

Problème 105 Cercle tangent

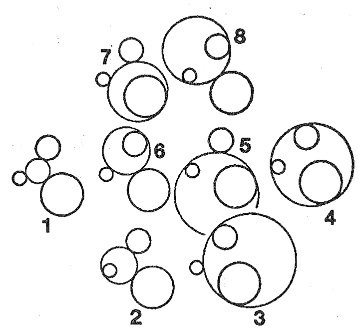
Soit trois cercles fixes et non concentriques. Trouver un cercle qui les touche tous les trois. Combien y a-t-il de solutions? Illustrer toutes les solutions.

Solution proposée:

Les Grecs étaient passés maîtres dans l'art de poser des problèmes, que ni eux ni les générations successives de mathématiciens et mathématiciennes n'ont jamais été capables de résoudre. Il suffit de rappeler la quadrature du cercle, la duplication du cube et la trisection de l'angle. Toutefois, certains des problèmes classiques de l'Antiquité ont été résolus et reviennent régulièrement dans l'enseignement ou dans les cours à l'université, quand il s'agit de la formation initiale des enseignants et enseignantes. C'est le cas du problème d'Apollonius.

Laguerre, pour résoudre ce problème, a utilisé la théorie des cycles.

C'est une belle activité géométrique élémentaire que l'on peut présenter au secondaire. Bien sûr, elle nécessite de l'ingéniosité; mais tout élève brillant de 5e secondaire peut la faire. Cette activité comprend 8 solutions. Dans l'illustration ci-dessous, trois cercles fixes, en trait gras (un petit, un moyen et un grand) sont tangents à un cercle légèrement dessiné.

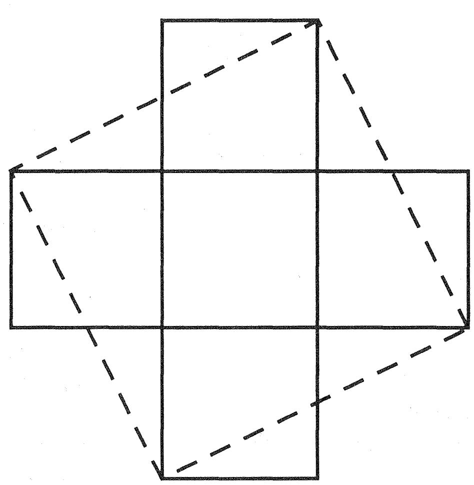


Problème 106 La croix

Transformer en un carré le pentomino en forme de croix.

Solution suggérée:

Soit le pentomino transformé de la façon suivante:



Il suffit de montrer que le quadrilatère (en pointillé) est un carré ayant la même aire que le pentomino. La démonstration est évidente.

Problème 107 Le rectangle partagé

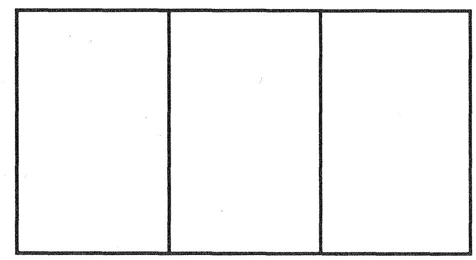
Partager un rectangle en trois régions équivalentes.

Solution suggérée:

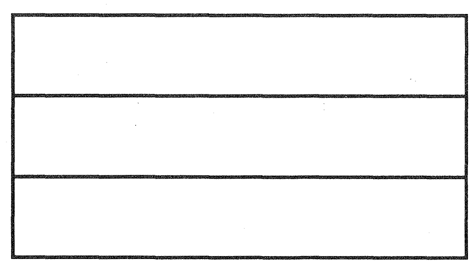
a. Solutions faciles: 3 parties congruentes (3 rectangles congrus)

2 cas:

1)



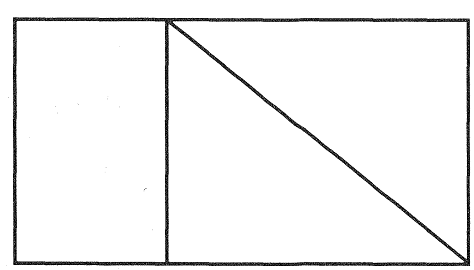
2)



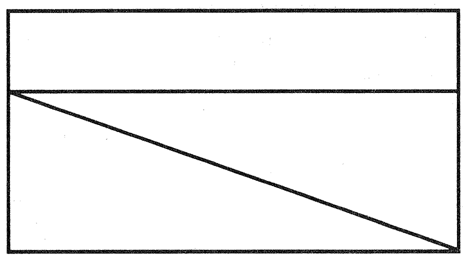
b. Solutions moins évidentes: un rectangle et deux triangles congrus

2 cas:

1)



2)

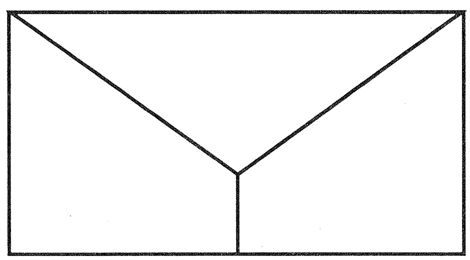


c. Solutions plus complexes:

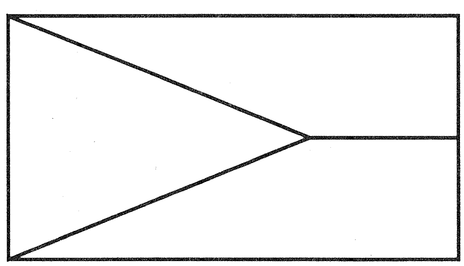
1er cas:
un triangle isocèle et deux trapèzes congrus.

Choix du point (milieu d'un côté et les deux tiers de l'autre).

i.

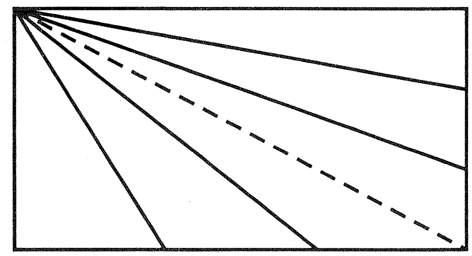


ii.



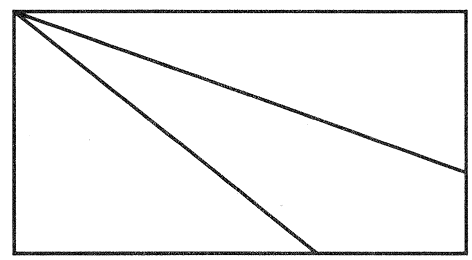
2e cas:
2 triangles rectangles et un quadrilatère.
Sommet commun aux trois figures: un des sommets du rectangle.

Méthode:
a. Partager le rectangle en six parties équivalentes en partageant les côtés en trois longueurs égales (la hauteur des triangles est constante dans chaque cas)



b. Ensuite, réunir ensemble deux parties équivalentes pour former seulement trois régions équivalentes.

La figure suivante illustre ce partage:



Problème 108 Nombre inférieur à 50

Déterminer le plus grand nombre naturel inférieur à 50 qui a la propriété suivante:

«Tous les nombres inférieurs à ce nombre et supérieurs à 1 et étant relativement premiers à ce nombre sont tous des nombres premiers.»

Solution suggérée:

Voici quelques contre-exemples:

1) 32 et 27 sont premiers entre eux mais 27 n'est pas un nombre premier;

2) 49 et 45 sont premiers entre eux mais 45 n'est pas un nombre premier;

3) 48 et 35 sont premiers entre eux mais 35 n'est pas un nombre premier.

Le plus grand nombre inférieur à 50 qui a la propriété est 30.

En effet, 30 et 29; 30 et 23; 30 et 19; 30 et 17; 30 et 13; 30 et 11; 30 et 7; les nombres 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29 sont premiers.

Pour un nombre inférieur à 30, on aurait le nombre 24 car seuls les nombres 23, 19, 17, 13, 11, 7 et 5 sont relativement premiers avec 24.

Questions:

1) Cet ensemble de nombres qui a cette propriété est-il infini ou fini?
2) Y a-t-il une règle générale pour les trouver?

La liste de ces nombres jusqu'à 50 est: 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24 et 30.

Problème 109 Une factorielle

Le nombre 10! + 1 est-il premier? Sinon, quels sont les facteurs de ce nombre?

Solution suggérée:

10! + 1 = 3 628 801
C'est un nombre divisible par 11, car 3 + 2 + 8 + 1 = 14 et 6 + 8 + 0 = 14, c.-à-d. les chiffres alternés de ce nombre ont la même somme.
D'où, 3 628 801 = 11 x 329 891
Je ne sais pas si le nombre 329 891 est premier; il faudrait vérifier jusqu'au 105e nombre premier qui est 577.

Problème 110 Lewis Carroll

Démontrer les deux théorèmes suivants de Lewis Carroll:

a. Le double de la somme de deux carrés est la somme de deux carrés.

b. Si la somme de deux carrés est paire, alors sa moitié est la somme de deux carrés.

Solution suggérée:

Ces deux propriétés sont facilement vérifiables à l'aide d'exemples:

1) $2(1 + 9) = 20$
$= 4 + 16$

2) $2(4 + 16) = 40$
$= 4 + 36$

3) $2(100 + 121) = 442$
$= 1 + 441$

4) $2(25 + 169) = 388$
$= 4 + 384$

a. i. Soit x et y deux nombres pairs; leurs carrés sont également pairs.
Soit $x = 2(n + k)$ et $y = 2(n + h)$

$$\begin{aligned}2(x^2 + y^2) &= 8(n + k)^2 + 8(n + h)^2\\ &= 8n^2 + 16nk + 8k^2 + 8n^2 + 16nh + 8h^2\\ &= 16n^2 + 16n(k + h) + 8(k^2 + h^2)\\ &= 16n^2 + 16n(k + h) + 4(k + h)^2 + 4k^2 + 4h^2 - 8kh\\ &= (4n + 2k + 2h)^2 + (2k - 2h)^2\end{aligned}$$

ii. Soit x pair et y impair; $x = 2n$ et $y = 2m + 1$

$$\begin{aligned}2(x^2 + y^2) &= 2(2n)^2 + 2(2m + 1)^2\\ &= 8n^2 + 8m^2 + 8m + 2\\ &= (2m + 2n + 1)^2 + (2m - 2n + 1)^2\end{aligned}$$

(après plusieurs essais)

iii. Soit x et y impair; $x = 2n + 1$ et $y = 2m + 1$

$$\begin{aligned}2(x^2 + y^2) &= 2(2n + 1)^2 + 2(2m + 1)^2\\ &= 8n^2 + 8n + 2 + 8m^2 + 8m + 2\\ &= 8n^2 + 8m^2 + 8n + 8m + 4\\ &= (2n + 2m + 2)^2 + (2n - 2m)^2\end{aligned}$$

(après plusieurs essais)

Donc, dans tous les cas, la propriété est prouvée.

b. i. Soit x et y sont pairs; $x = 2n$ et $y = 2m$
$x^2 + y^2 = 4n^2 + 4m^2$

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2) \div 2 &= 2n^2 + 2m^2\\ &= 2(n^2 + m^2)\end{aligned}$$

D'après la première propriété démontrée, le double de la somme de deux carrés est la somme de deux carrés.

ii. Soit x et y impairs, et x^2 et y^2 impairs.

soit $x = 2n + 1$ et $y = 2m + 1$
$x^2 + y^2 = (2n + 1)^2 + (2m + 1)^2$

$$= 4n^2 + 4n + 1 + 4m^2 + 4m + 1$$
$$= 4n^2 + 4m^2 + 4n + 4m + 2$$

Or, $(x^2 + y^2) \div 2 = 2n^2 + 2m^2 + 2n + 2m + 1$
$$= (n + m + 1)^2 + (n - m)^2$$

2e partie: les nouveaux jeux et problèmes

Problème 111 La croix grecque

Dans le livre «Les casse-tête mathématiques de Sam Loyd», Martin Gardner propose, à la page 232, (Dunod, 1970), le découpage de la croix grecque (signe de la Croix-Rouge ou le pentomino en forme de croix).

a. Découper un carré en cinq morceaux pouvant s'assembler pour former 2 croix grecques de même grandeur (sans perte d'espace).

b. Découper un carré en 5 morceaux pour former deux croix grecques de grandeurs différentes.

c. Découper une croix grecque en 5 morceaux qui forment deux croix grecques plus petites mais de même grandeur.

d. Découper un carré en 4 morceaux pour former deux croix grecques de même grandeur.

Problème 112 Trois nombres et les dix chiffres arabes

Former deux nombres naturels à l'aide des 10 chiffres arabes. Chaque chiffre n'est utilisé qu'une seule fois. Si la somme de ces deux nombres est égale à 1a9991, quelle est la valeur de a? Expliquer pourquoi.

Problème 113 Jetons et grille 4 x 4

Placer 10 jetons sur une grille 4 x 4 de façon à former le plus de lignes possibles contenant un nombre pair de jetons (2 ou 4). Les lignes peuvent être verticales, horizontales ou en diago nale à 45° ou 135°.

Problème 114 Encore le carré magique 3 x 3!

Placer dans un carré magique les nombre rationnels suivants dont la somme des ligne horizontales, verticales ou en diagonale es égale à six: 0,4; 0,8; 1,2; 1,6; 2,0; 2,4; 2,8; 3,2 3,6.

Problème 115 Où sont-elles situées?

Dans un quartier, trois familles vivent dan trois maisons qui se suivent. Où est chacun des familles si les renseignements suivants son vrais?

1) Les Tremblay demeurent à côté de Provencher.

2) Le fils des Dupont est ami avec le fils de Tremblay.

3) La famille à droite n'a pas une Ford.

4) La famille qui a une Nissan ne demeure pa à côté de la famille qui a une Ford.

5) La famille dont la maison est au centre n' pas d'enfants.

Veuillez adresser toute correspondance:

Jean-Marie Labrie
870, chemin de St-Jean
La Prairie (Québec)
J5R 2L5
