CONCOURS MATHÉMATIQUE DE L'AMQ (1993), AU SECONDAIRE

Le concours mathématique du Québec n'est pas un examen. Il vise à déceler les meilleurs talents en mathématiques parmi la population étudiante. Pour que ces grands talents puissent se détacher nettement de la masse des autres, le questionnaire est abondant et varié: plusieurs genres de questions et divers degrés de difficulté. Qu'un étudiant ne se décourage donc pas s'il n'arrive pas à répondre à plus de deux ou trois questions. Les auteurs du questionnaire s'attendent à ce que les bons étudiants fournissent quatre ou cinq bonnes réponses. Si vous en trouvez six, vous êtes excellent en mathématiques. Seuls quelques génies en donneront sept. *Bonne chance!*

1. LA BONNE DISTANCE

Une voiture se déplace sur l'autoroute à une vitesse constante. Si sa vitesse était augmentée de 18 kilomètres/heure, elle parcourrait une certaine distance d en 5 minutes de moins. Si sa vitesse était réduite de 15 kilomètres/heure, elle mettrait 6 minutes de plus à parcourir d. Quelle est la longueur de d ?

2. LA SOMME DE CETTE ANNÉE

Résoudre l'addition suivante

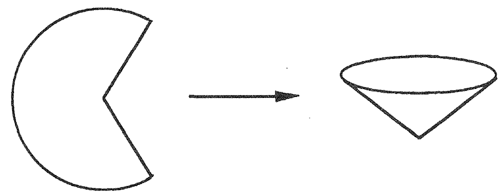
$$\begin{array}{r} \mathbf{A\,B\,C} \\ +\,\mathbf{P\,Q\,R} \\ +\,\mathbf{X\,Y\,Z} \\ \hline \mathbf{1\,9\,9\,3} \end{array}$$

où **A, B, C, P, Q, R, X, Y, Z** représentent neuf chiffres différents choisis parmi les 10 chiffres **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.**

Note 1. Travailler dans le système décimal usuel. Par exemple, si **A = 7, B = 4, C = 2,** alors **ABC** représente le nombre **742** écrit en base **10.**

Note 2. Le problème possède plusieurs solutions. Nous n'en demandons qu'une seule.

3. LE «PACMAN» DEVENU «VERRE ÀBOIRE»



Bruno a décidé de construire un «verre à boire» conique d'une capacité d'un litre (=1000 cm^3) à partir d'un morceau de carton circulaire, en y enlevant un angle au centre de 120 degrés (voir figure). Trouver une formule donnant le rayon du morceau de carton que Bruno doit utiliser.

Rappel. Le volume d'un cône est

$\frac{1}{3}\pi r^2 h$ où r est son rayon et h est sa hauteur.

4. L'ÉQUATION TORDUE À RÉSOUDRE

Trouver deux nombres entiers x, y satisfaisant les conditions

$$x^2 + \frac{1500}{x} = y^2 + \frac{1500}{y}, \quad 0 < x < y.$$

5. LES RACINES EMBOÎTÉES DE MARIE

Marie s'ennuie beaucoup à la maternelle de son quartier, aussi a-t-elle décidé d'y apporter, en cachette, la calculatrice de son grand frère. Pendant la sieste, elle constate avec émerveillement que la suite de nombres

$$\sqrt{1},\ \sqrt{1+\sqrt{1}},\ \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}},\ \ldots$$

(ou chaque terme est obtenu en extrayant la racine carrée positive de la somme du terme précédent avec 1), s'approche de plus en plus d'un certain nombre qu'elle appelle Marie (1).

Elle recommence avec 2.

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ \ldots,\ etc.$$

pour constater encore une fois que cette suite de nombres s'approche de plus en plus d'un autre nombre, qu'elle appelle bien sûr Marie (2). De même, si elle répète le processus avec 3, 4, 5, …, elle trouve Marie (3), Marie (4), Marie (5), … .

Si ***n*** est un entier positif, quelle est la valeur de Marie (***n***)?

6. LE TABLEAU INCOMPLET

Dans une ligue de hockey à cinq clubs, en début de saison, au moment où aucune paire de clubs ne s'est affrontée plus d'une fois, on a le tableau des résultats incomplet suivant:

	Parties				Buts		Points
	jouées	gagnées	perdues	nulles	pour	contre	
A			1		1	3	0
B			1	2	8	8	
C					5		
D			0	0	4	2	2
E					0		

Les points de la dernière colonne sont accordés comme suit: deux pour une partie gagnée, un pour une partie nulle. Indiquer quelles parties ont été jouées jusqu'ici, et avec quels résultats, de façon à compléter le tableau.

7. LA REPRODUCTION DE SAUTERELLES ZÉBRÉES

Au début du XIIIe siècle, alors qu'il réfléchissait à la reproduction des lapins, Léonard de Pise en est venu à étudier la suite dite de Fibonacci: on part de 0 et 1, et chacun des termes suivants est simplement la somme des deux termes précédents. Ainsi, les premiers termes sont

$$0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \quad 34 \quad 55 \ldots$$

Une autre façon d'exprimer cela est de dire que nous avons une suite d'entiers $F_0, F_1, F_2, \ldots,$ avec $F_0 = 0,\ F_1 = 1$ et $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

En étudiant la reproduction des sauterelles zébrées, Simone se retrouve devant la suite d'entiers définie par

$$S_0 = 1,\ S_1 = 3 \text{ et } S_n = 4S_{n-1} + S_{n-2}$$

lorsque $n \geq 2$. Ainsi les termes suivants de la suite sont:

$$S_2 = 4S_1 + S_0 = 4 \times 3 + 1 = 13$$

$$S_3 = 4S_2 + S_1 = 4 \times 13 + 3 = 55$$

$$S_4 = 4S_3 + S_2 = 4 \times 55 + 13 = 233.$$

Montrer que tous les éléments de la suite de Simone se retrouvent dans la suite de Fibonacci.

CONCOURS MATHÉMATIQUE DE L'AMQ (1993), SOLUTIONNAIRE, AU SECONDAIRE

1. LA BONNE DISTANCE

Soit v la vitesse constante. Soit t le temps mis à parcourir la distance d à la vitesse v. On a alors
$$v = \frac{d}{t}$$
d'où
$$t = \frac{d}{v}.$$

Les données du problème donnent lieu à l'équation
$$\frac{d}{v} - \frac{d}{v+18} = \frac{5}{60},$$
d'où l'on déduit que
$$5\,400d = 25v^2 + 450v, \quad (1)$$
et à l'équation
$$\frac{d}{v-15} - \frac{d}{v} = \frac{6}{60},$$
d'où l'on déduit que
$$5\,400d = 36v^2 - 540v. \quad (2)$$

On soustrait (1) de (2) pour obtenir
$$0 = 11v^2 - 990v.$$

On élimine $v = 0$. Il reste $11v = 990$, ou $v =$ 90 km/h. On substitue cette valeur de v dans (2) pour obtenir
$$5\,400d = 36\times90\times90 - 5\,540\times90 = 243\,000,$$
d'où
$$d = 45 \text{ km}.$$

Vérification. 45 km à 90 km/h: 30 minutes
45 km à 108 km/h: 25 minutes
45 km à 75 km/h: 36 minutes.

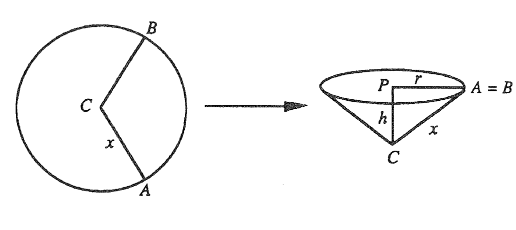
2. LA SOMME DE CETTE ANNÉE

Il est clair que toute solution en engendre plusieurs autres en permutant les éléments de chaque colonne. L'ensemble **{C,R,Z}** des unités doit satisfaire **C+R+Z** = 3, 13 ou 23. Il suffit donc de chercher parmi les possibilités suivantes: **{C,R,Z}** = {0,1,2}, {0,4,9}, {0,5,8}, {0,6,7}, {1,3,9}, {1,4,8}, {1,5,7}, {2,3,8}, {2,4,7}, {2,5,6}, {3,4,6} ou {6,8,9}. Une recherche systématique analogue pour l'ensemble **{B, Q, Y}** des dizaines et l'ensemble **{A, P, X}** des centaines fournit les solutions essentiellement différentes suivantes:

430	340	340	210
+671	+761	+671	+836
+892	+892	+982	+947
1993	1993	1993	1993
401	301	402	203
+723	+724	+613	+814
+869	+968	+978	+976
1993	1993	1993	1993

3. LE «PACMAN» DEVENU «VERRE À BOIRE»

Le morceau de carton est courbé de sorte que les segments CB et CA coïncident.



Soit $x = AC$ = rayon du morceau de carton. Puisque $120° = \frac{1}{3}$ tour, on a: $AB = \frac{2}{3} \cdot 2\pi x$ = circonférence de la base du cône.

$r = PA$ = rayon du cône $= \left(\frac{2}{3} \cdot 2\pi x\right) / 2\pi = \frac{2}{3}\, x.$

$h = PC$ = hauteur du cône $= \sqrt{AC^2 - AC^2} = x\sqrt{5} / 3.$

$Vol = \frac{\pi r^2 h}{3} = \pi \cdot \left(\frac{2}{3}\, x\right)^2 \left(\frac{x\sqrt{5}}{3}\right) / 3 = 1000.$

D'où $\frac{4\pi x^3 \sqrt{5}}{3^4} = 1000.$

Finalement: $x = 15 \cdot \sqrt[3]{\frac{6}{\pi\sqrt{5}}}$

4. L'ÉQUATION TORDUE À RÉSOUDRE

L'équation à résoudre équivaut à

$$x^2 - y^2 = 1500\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right).$$

C'est-à-dire

$$(x + y)(x - y) = 1500\left(\frac{x-y}{xy}\right). \qquad (*)$$

Puisque $0 < x < y$, on a $x - y \neq 0$. On peut donc simplifier $(*)$ par $(x - y)$ pour obtenir

$$x + y = \left(\frac{1500}{xy}\right), \text{ i.e } (x + y) \cdot (xy) = 1500.$$

Ainsi, $x + y = d$ = diviseur de 1500 et $xy = \frac{1500}{d}$

Table des possibilités à priori:

x + y	xy		
1	1500		à rejeter
2	750		à rejeter
3	500		à rejeter
4	375		à rejeter
5	300		à rejeter
6	250		à rejeter
10	150		à rejeter
12	125		à rejeter
15	100		à rejeter
20	**75**	=>	$\boldsymbol{x = 5,\ y = 15}$
25	60		à rejeter
30	50		à rejeter

La seule possibilité (avec $0 < x < y$) est $x = 5$, $y = 15$.

5. LES RACINES EMBOÎTÉES DE MARIE

Pout n fixé, posons x = Marie(n). Alors

$$x = \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{\ldots}}}}$$
$$= \sqrt{n + x}$$

Élevant au carré, on obtient successivement

$$x^2 = n + x$$

$$x^2 - x - n = 0.$$

Les deux solutions de cette équation sont:

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4n}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4n}}{2}.$$

La solution x_1 est à rejeter puisqu'elle est négative. Il ne reste comme possibilité que la solution positive x_2.

Ainsi

$$\text{Marie}\,(n) = x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4n}}{2}.$$

6. LE TABLEAU INCOMPLET

Les nombres donnés permettent de compléter les lignes A et D du tableau. Comme A et D n'ont aucune partie nulle, les deux parties nulles de B ont été jouées contre C et E. Comme B a 8 points contre et 8 points pour, avec une partie de perdue et deux nulles, B a aussi gagné au moins une partie. N'ayant pas joué deux fois contre le même club, B a gagné exactement une partie. On peut donc compléter la ligne B du tableau. B a gagné 3-1 contre A et perdu 2-4 contre D. Comme E n'a encore compté aucun but, B a annulé 0-0 contre E et annulé 3-3 contre C. Enfin, pour équilibrer les colonnes de buts pour et contre, on doit conclure que C a gagné 2-0 une partie contre E, ce qui permet de compléter le tableau.

	Parties				Buts		Points
	jouées	gagnées	perdues	nulles	pour	contre	
A	1	0	1	0	1	3	0
B	4	1	1	2	8	8	4
C	2	1	0	1	5	3	3
D	1	1	0	0	4	2	2
E	2	0	1	1	0	2	1

7. LA REPRODUCTION DES SAUTERELLES ZÉBRÉES

On construit facilement la table suivante pour les premières valeurs des suites $F_0, F_1, F_2, \ldots,$ et $S_0, S_1, S_2, \ldots$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
S_n	1	3	13	55	233									

On constate que

$$S_0 = F_1,\ S_1 = F_4,\ S_2 = F_7,\ S_3 = F_{10},\ S_4 = F_{13}.$$

Ceci permet de conjecturer que, pour tout $k \geq 0$,

$$S_k = F_{3k+1} \quad (*)$$

En établissant $(*)$ on démontrerait donc que tous les éléments de la suite de Simone se trouvent dans la suite de Fibonacci. Maintenant, considérons une portion quelconque de la suite de Fibonacci formée de 4 termes consécutifs que l'on désigne par X, a, b, Y. Cherchons à exprimer a et b en fonction de X et Y. On a

$$\begin{aligned} X+a &= b \\ a+b &= Y \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$a = \frac{Y-X}{2}$$
$$b = \frac{Y+X}{2}$$

Notre portion peut donc s'écrire

$$X, \frac{Y-X}{2}, \frac{Y+X}{2}, Y.$$

Complétons cette suite jusqu'au 7e en suivant la règle de construction de Fibonacci:

$$X, \frac{Y-X}{2}, \frac{Y+X}{2}, Y, \frac{3Y+X}{2}, \frac{5Y+X}{2}, 4Y+X.$$

Cela nous indique que si nous prenons une portion de 7 termes consécutifs de la suite de Fibonacci, et que nous désignons le 1[er] par X et le 4[e] par Y, alors le 7[e] sera $4Y + X$.

Donc si deux termes consécutifs S_k et S_{k+1} de la suite de Simone correspondent respectivement aux termes F_{3k+1} et F_{3k+4} de la suite de Fibonacci, alors, puisque $S_{k+2} = 4S_{k+1} + S_k$, on a que $S_{k+2} = F_{3k+7}$. Et comme $S_0 = F_1$ et $S_1 = F_4$, une application répétée du raisonnement ci-haut avec les valeurs successives $k = 0, 1, 2, \ldots$ entraîne que tout élément de la suite de Simone appartient à la suite de Fibonacci.

CONCOURS MATHÉMATIQUE DE L'AMQ (1993), LES GAGNANTS AU SECONDAIRE

1er	
CHAN, Sheng-ming	École Secondaire Jeanne-Mance, Montréal
2ième	
GRÉGOIRE, Thomas	École Secondaire Pierre-Laporte, Ville Mont-Royal
3ième	
GHITZA, Alexandru	École Secondaire Jeanne-Mance, Montréal
4ième	
YAO, Hsinyun	École Secondaire Mont-Royal, Ville Mont-Royal
5ième	
BOHÉMIER, Marc-Albert	Collège Mont Saint-Louis, Montréal
6ième	
BRIÈRE, Frédéric	Séminaire de Sherbrooke, Sherbrooke
7ième	
PETTIGREW, Martin	Petit Séminaire de Québec, Québec
8ième	
BOUDREAULT, Julien	Collège Mont Saint-Louis, Montréal
9ième	
LAUZON, Jean-Hugues	École Secondaire Louis-Riel, Montréal
10ième	
TANG, Zhaoping	École Secondaire van Horne, Montréal
PILETTE, Valérie	École Secondaire St-Joseph, St-Hyacinthe
LAVOIE, Frédéric	Petit Séminaire de Québec, Québec
AWAD, Thomas	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
14ième	
DUBOIS, Nathalie	Collège Mont-Saint-Louis, Montréal
15ième	
BÉRARD, René	Séminaire de Sherbrooke, Sherbrooke
16ième	
HENRI, Patrick	Séminaire de Sherbrooke, Sherbrooke
FORTIER, Alexandre	Séminaire de la Très-Sainte-Trinité, St-Bruno
FARAND, Paul	Polyvalente J.-H. Leclerc, Granby
19ième	
EL-HADDAD, Issam	Mont-de-la-Salle, Laval

COUTURE, David	Polyvalente des Appalaches, Ste-Justine
PELLETIER, Emmanuelle	Collège Marie de France, Montréal
22ième	
BOURQUE, Guillaume	École SecondaireSophie-Barat, Montréal
PALOMINO, Jean-François	Collège Mont Saint-Louis, Montréal
MARCOTTE, Dominic	Polyvalente de Neufchâtel, Neufchâtel
25ième	
HOLLAND, Mark	École Secondaire Jean XXIII, Dorval
CORBEIL, Anne	École Joseph-François-Perrault, Montréal
SIMON, Alexandre	Collège Marie de France, Montréal
YELLE, Stéphane	Polyvalente Deux-Montagnes, Deux-Montagnes
29ième	
POUPART, Pascal	École Secondaire Louis-Riel, Montréal
LÉONARD, Daniel	Séminaire Très-Sainte-Trinité, St-Bruno
DESCHÊNES, Keven	Petit Séminaire de Québec, Québec
VAN HOVE, Patrick	Petit Séminaire de Québec, Québec
MARTEL, Jonathan	Petit Séminaire de Québec, Québec
ZAMFIR, Andrei	École Secondaire Jeanne-Mance, Montréal
GIGNAC, Guy	Collège St-Charles Garnier, Québec
PETITPAS, Olivier	Collège St-Charles-Garnier, Québec
MYRAND, Richard	Polyvalente Dominique-Racine, Chicoutimi
CASTONGUAY, Roselyne	Collège Durocher, St-Lambert
39ième	
TRÉPANIER, Jean-Pierre	École Secondaire Sophie-Barat, Montréal
LÉGARÉ, Frédéric	Collège Charles-Lemoyne, Ste-Catherine
NGUYEN, Jean-Baptiste	École Secondaire Pierre-Laporte, Ville Mont-Royal
LAPOINTE, Sophie	Collège Français, Longueuil
LIAO, Yuan-Mei	École Secondaire Antoine-Brossard, Brossard
DUFRESNE, Karl	École Curé Antoine-Labelle, Laval
DE RICO, Francis	École Curé Antoine-Labelle, Laval
LÉPICIER, Philippe	Académie Antoine-Manseau, Joliette
MIZERSKI, Maciek	Collège Saint-Charles-Garnier, Québec
GASCON, Martin	Collège Mont Saint-Louis, Montréal
BRAULT-LABBÉ, Anne	Collège Mont Saint-Louis, Montréal
GAUDET, Mathieu	École Polyvalente Paul-Hubert, Rimouski
DOBLER, Lynn	École Secondaire Jean XXIII, Dorval
GAUDET, Philippe	École Secondaire du Verbe Divin, Granby
PLAMONDON, Annie	Institut Secondaire Keranna, Trois-Rivières
ROBICHAUD, Frédéric	École Joseph-François-Perrault, Montréal
ALLARD, Jean-Pierre	Polyvalente La Magdeleine, Laprairie
BEAUCHEMIN, Julie	École Secondaire de Rochebelle, Ste-Foy