JEUX ET PROBLÈMES

an-Marie Labrie,
niversité de Sherbrooke

Cette chronique termine sa 11e année d'existence. Nous vous remercions de votre fidélité à participer en nous envoyant des solutions, des commentaires, des suggestions et même des problèmes et des jeux.

Nous vous invitons à nous écrire à l'adresse suivante :

Jean-Marie Labrie
870, chemin de Saint-Jean
La Prairie (Québec) J5R 2L5

Avant de donner les solutions aux problèmes proposés dans le Bulletin de mars-mai 1993, je vous livre le commentaire suivant.

Il est important de prendre en considération les représentations spontanées des élèves vis-à-vis d'un problème ou même d'une notion mathématique. Ces représentations deviennent le point de départ de toute démarche ou résolution de problèmes. En effet, nous savons que chaque élève a sa manière d'apprendre, d'observer, d'imaginer ou de comprendre. Alain Taurisson a souligné ce comportement comme suit :

«Le problème que l'élève résout est celui qu'il se représente et non celui qui est proposé.»

La démarche de résolution de problèmes n'est jamais simple et souvent les représentations spontanées des élèves mal utilisées sont des obstacles au cheminement vers la solution. De plus, cette démarche comprend un ensemble de gestes gérés par de nombreuses habiletés intellectuelles que l'élève développe peu à peu. En voici quelques-unes: comprendre, analyser, construire, généraliser, particulariser, mathématiser, abstraire, effectuer des opérations, structurer, ordonner, organiser, etc.

Si l'élève a la volonté d'apprendre et le désir de savoir, notre rôle comme enseignant ou enseignante est alors essentiellement un rôle de soutien en stimulant sa curiosité et en l'aidant à persévérer dans la voie de la réussite.

1ère partie: Solutions aux problèmes du dernier numéro du Bulletin AMQ (mars-mai 1993)

Problème 101 Les nombres premiers entre 0 et 100

Quels sont les deux derniers chiffres du produit des 25 premiers nombres premiers ?

Solution suggérée

Il y a les nombres 2 et 5 dont le produit se termine par zéro. Ensuite, les produits partiels suivants :

1) $3 \times 13 \times 23 \times 43 \times 53 \times 73 \times 83$

2) $11 \times 31 \times 41 \times 61 \times 71$

3) $7 \times 17 \times 37 \times 47 \times 67 \times 97$

4) $19 \times 29 \times 59 \times 79 \times 89$

Ces produits partiels donnent comme dernier chiffre, respectivement :

7, 1, 9 et 9.

Le dernier chiffre du produit donne 7.

Donc, les deux chiffres cherchés sont 70.

Problème 102 Une suite particulière

Quels sont les quatre nombres manquants dans la suite ci-dessous ?

103, 107, 115, 122, 127, 137, ..., ..., ..., ..., 199, 218, 229, 242, 250, 257, 271, 281, 292.

Solution suggérée

Si on effectue la somme des chiffres de chaque terme de cette suite, on obtient :

4, 8, 7, 5, 10, 11, ..., ..., ..., ..., 10, 11, 13 (ou 4), 8, 7, 14 (ou 5), 10, 11, 13 (ou 4).

On observe qu'on a une nouvelle suite de la forme suivante :

4, 8, 7, 5, 10, 11, 4, 8, 7, 5, 10, 11, 4, 8, 7, 5, 10, 11,...

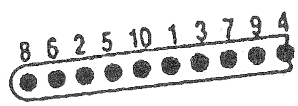
Il faut trouver quatre nombres entre 137 et 199 qui correspondent à 4, 8, 7 et 5.

La solution n'est pas unique. On peut avoir :

a. 139, 152, 160, 185
b. 148, 161, 178, 194
c. 157, 170, 178, 185

Problème 103 Jeu du tapis roulant

Dix cartons sont placés sur un tapis roulant comme l'indique la figure ci-dessous :



Le bras mécanique utilisé pour les classer par ordre numérique de la gauche vers la droite peut prendre 3 cartons adjacents et les placer en haut à droite du tapis roulant alors que les autres cartons glissent pour fermer la brèche. Pouvez-vous classer les 10 cartons en moins de 7 mouvements ? Si oui, comment ?
(Bulletin de l'APMEP, déc. 1992, p. 542)

Solution suggérée

Pouvez-vous faire mieux ?

Probablement. Le classement obtenu ici s'est fait en 9 mouvements que voici :

1er : 8 6 2 3 7 9 4 5 10 1

2e : 8 6 9 4 5 10 1 2 3 7

3e : 4 5 10 1 2 3 7 8 6 9

4e : 4 5 3 7 8 6 9 10 1 2

5e : 4 5 6 9 10 1 2 3 7 8

6e : 4 5 6 2 3 7 8 9 10 1

7e : 4 5 6 8 9 10 1 2 3 7

8e : 4 5 6 1 2 3 7 8 9 10

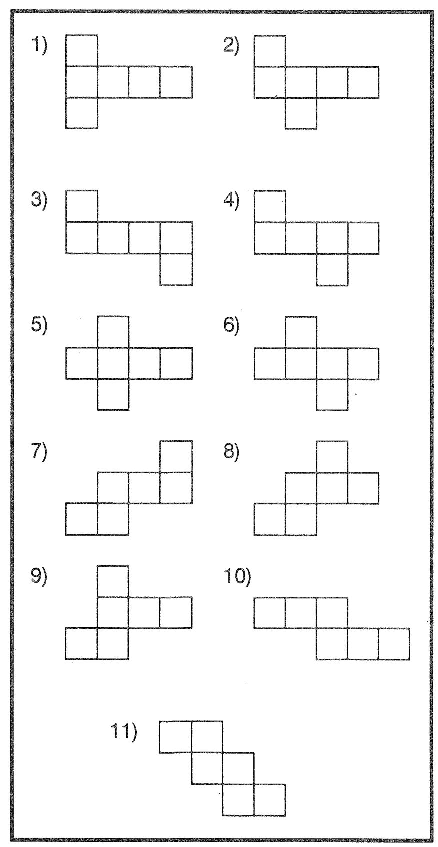
9e : 4 5 6 7 8 9 10 1 2 3

Problème 104 La boîte de forme cubique

Déterminer toutes les façons de défaire une boîte de forme cubique, présentées sous la forme d'hexominos.

Solution suggérée

Nous savons qu'il existe 35 hexominos différents, indépendamment des transformations isométriques de ces figures. Parmi ces hexominos, on n'en compte seulement 11 qui sont le développement du cube dans le plan. Voici l'illustration de ces 11 hexominos :



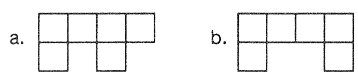
Pourquoi les 24 autres hexominos ne correspondent-ils pas à des boîtes défaites ?

1) Impossible avec 6 petits carrés en ligne.

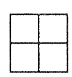
2) Impossible avec 5 petits carrés en ligne.

3) Impossible avec 4 petits carrés en ligne quand les deux autres petits carrés sont du même côté.

   Exemples :



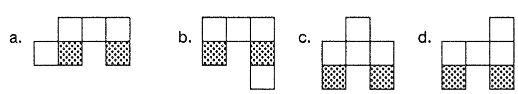
4) Impossible quand il y a 4 petits carrés placés comme suit :



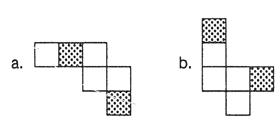
   peu importe la position des 2 autres petits carrés.

5) Impossible avec 5 petits carrés placés en forme de U.
   (peu importe la position du 6e petit carré.)

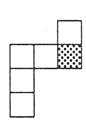
   Dans ces cas, les petits carrés ombragés se superposent en refaisant le cube.



6) Impossible d'avoir les deux cas suivants. Les petits carrés ombragés se superposent en refaisant le cube.



7) Un dernier cas: le petit carré ombragé touche seulement à trois autres petits carrés au lieu de 4.



2e partie: LES NOUVEAUX PROBLÈMES

Problème 105 Cercle tangent

Soit trois cercles fixes disjoints et non concentriques. Trouver un cercle qui les touche tous les trois. Combien y a-t-il de solutions? Illustrer toutes les solutions.

Problème 106 La croix

Transformer le pentomino en forme de croix en un carré.

Problème 107 Le rectangle partagé

Diviser un rectangle en trois parties congruentes.

Problème 108 Nombre inférieur à 50

Déterminer le plus grand nombre naturel qui a la propriété suivante :

«Tous les nombres inférieurs à ce nombre et supérieurs à 1 et qui sont relativement premiers à ce nombre sont tous des nombres premiers.»

Problème 109 Une factorielle

Le nombre $10! + 1$ est-il premier? Sinon, quels sont les facteurs de ce nombre?

Problème 110 Lewis Carroll

Démontrer les deux théorèmes suivants de Lewis Carroll :

a. Le double de la somme de deux carrés est la somme de deux carrés.

b. Si la somme de deux carrés est paire, alors sa moitié est la somme de deux carrés.