CONCOURS MATHÉMATIQUE DE L'AMQ (1993), AU COLLÉGIAL

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

Ceci n'est pas un examen, mais bien un concours; il est donc tout naturel que vous trouviez certaines questions difficiles et que vous ne puissiez répondre qu'à quelques-unes. La correction, strictement confidentielle, prendra en compte divers éléments, dont la précision, la clarté, la rigueur et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée.

Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

Note : l'usage de toute forme de calculatrice est interdit.

---

1) (Le quadrilatère bien rempli)

Sur chaque côté d'un quadrilatère convexe $ABCD$, on trace, à l'intérieur du quadrilatère, des demi-cercles de diamètres respectifs AB, BC, CD, DA. Montrer que l'intérieur du quadrilatère est complètement couvert par les demi-cercles.

2) (Ménage à trois)

Soient trois entiers positifs, x, y, z tels que

- $x < y < z$;
- La somme de deux quelconques de ces nombres est divisible par le troisième;
- Ces nombres sont deux à deux relativement premiers.

Trouver ces nombres.

3) (Un lieu de rencontre)

On suppose donnés, sur la droite réelle, des segments (intervalles fermés) I_1, I_2, ..., I_n dont deux d'entre eux ont toujours au moins un point en commun. Montrer qu'il existe au moins un point commun à tous les segments.

4) (Retour à la base)

Déterminer les deux nombres premiers $p \leq q$ tels que

$$\frac{1}{pq} = 0,\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}_{(2)} \qquad \text{en base 2, et}$$

$$\frac{1}{p+q} = 0,\overline{b_1b_2b_3b_4b_5}_{(3)} \qquad \text{en base 3.}$$

Note. Comme à l'accoutumée, l'expression 0, $n_1n_2...n_k$ désigne la fraction à développement décimal périodique 0, $n_1n_2...n_kn_1n_2...n_kn_1n_2...$

5) (Zéro, toujours zéro)

Si a,b,c, sont trois entiers qui satisfont

$$a^3 + 2b^3 + 4c^3 = 0,$$

montrer que $a = b = c = 0$.

6) (Le professeur écartelé)

Un professeur a 40 étudiantes et étudiants dont les noms sont consignés sur deux listes de 20 noms. Après un examen, il doit transcrire les notes des étudiants (dont la répartition est aléatoire) sur les deux listes. Il commence avec la liste 1 et change de liste à chaque fois que cela est nécessaire. Quel est le nombre moyen de changements de liste?

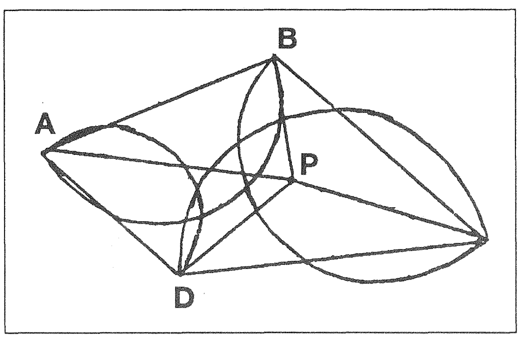
CONCOURS MATHÉMATIQUE DE L'AMQ (1993), SOLUTIONNAIRE, AU COLLÉGIAL

1) (Le quadrilatère bien rempli)

Sur chaque côté d'un quadrilatère convexe *ABCD,* on trace, à l'intérieur du quadrilatère, des demi-cercles de diamètres respectifs *AB, BC, CD, DA.* Montrer que l'intérieur du quadrilatère est complètement couvert par les demi-cercles.

Solution

Soit le point P intérieur au quadrilatère convexe *ABCD.* Menons *PA, PB, PC* et *PD.* La somme des 4 angles ainsi déterminés autour de *P* est 360°; au moins un de ces angles est donc $\geq 90°$. Si *P* est extérieur à chaque demi-cercle, il «voit» chacun des 4 diamètres sous un angle $< 90°$, ce qui est donc impossible.



2) (Ménage à trois)

Soit trois entiers positifs, x, y, z tels que

- $x < y < z$;
- La somme de deux quelconques de ces nombres est divisible par le troisième;
- Ces nombres sont deux à deux relativement premiers.

Trouver ces nombres.

Solution

- Puisque $x < y < z$, alors $x + y < 2z$; z divisant $x + y$, on a alors $x + y = z$
- Puisque

y divise $x + z$, alors

y divise $2x + y$, donc

y divise $2x$;

puisque $x < y$, alors $y = 2x$.

- Donc $z = 3x$. Les 3 nombres sont donc x, $2x$, $3x$. Puisqu'ils sont aussi premiers entre eux, $x = 1, y = 2, z = 3$.

3) (Un lieu de rencontre)

On suppose donnés, sur la droite réelle, des segments (intervalles fermés) $I_1, I_2, \ldots, I_n$ dont deux d'entre eux ont toujours au moins un point en commun. Montrer qu'il existe au moins un point commun à tous les segments.

Solution

Soit $I_1 = [a_1, b_1], \ldots, I_n = [a_n, b_n]$. On peut supposer (quitte à renuméroter les I_i) que $b_i \leq b2 \leq \ldots \leq b_n$.

Puisque $I_1 \cap I_k \neq \varnothing$, pour tous $k = 2, \ldots, n$, alors $a_k \leq b_1$.
Donc $b_1 \in \bigcap_{i=l}^{n} I_i$.

Note :
On peut aussi procéder par récurrence sur le nombre n d'intervalles, montrant en particulier

qu'il est impossible que l'intervalle formé des points communs à $I_1, \ldots I_{n-1}$ (hypothèse d'induction) soit disjoint de I_n.

4) (Retour à la base)

Déterminer les deux nombres premiers $p \leq q$ tels que

$$\frac{1}{pq} = 0,\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}_{(2)} \quad \text{en base 2, et}$$

$$\frac{1}{p+q} = 0,\overline{b_1b_2b_3b_4b_5}_{(3)} \quad \text{en base 3.}$$

Note :
Comme à l'accoutumée, l'expression $0,\overline{n_1n_2\ldots n_k}$ désigne la fraction à développement décimal périodique $0, n_1\, n_2\ldots n_kn_1n_2\ldots n_kn_1n_2\ldots$

Solution

- $x = \frac{1}{pq} = 0,\overline{a_1a_2\ldots a_8}_{(2)}$ entraîne que $2^8x - x \in \mathbb{N}$, donc $2^8 - 1 = pqm$, où $m \in \mathbb{N}$; de façon analogue, $3^5 - 1 = (p+q)n$, où $n \in \mathbb{N}$.
- Puisque $2^8 - 1 = 255 = 3.5.17$, alors $(p,q) = (3,5)$ ou $(3,17)$ ou $(5,17)$.
- Puisque $3^5 - 1 = 242 = 2.11^2$, alors $p+q$, qui divise 242, est l'un de 1, 2, 11, 22, 121, 242.
- Donc $p = 5$, $q = 17$. On vérifie de fait que

$$\frac{1}{pq} = \frac{1}{85} = 0,\overline{00000011}_{(2)}$$

$$\frac{1}{p+q} = \frac{1}{22} = 0,\overline{00102}_{(3)}$$

5) (Zéro, toujours zéro)

Si $a,b,c,$ sont trois entiers qui satisfont

$$a^3 + 2b^3 + 4c^3 = 0,$$

montrer que $a = b = c = 0$.

Solution

Si $(a,b,c,)$ est une solution entière non nulle, alors a^3 est pair, donc a est pair, soit $a = 2a'$.

On a donc

$$8a'^3 + 2b^3 + 4c^3 = 0, \text{ ou}$$

$$4a'^3 + b^3 + 2c^3 = 0.$$

De façon analogue, il existe b' et c' tels que $b = 2b'$, $c = 2c'$, et

$$a'^3 + b'^3 + c'^3 = 0.$$

Si donc, (a, b, c) est solution entière non nulle, alors $\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)$ l'est aussi. En répétant le processus, on obtient une infinité de solutions entières non nulles de la forme

$$\left(\frac{a}{2^k},\frac{b}{2^k},\frac{c}{2^k}\right), k = 0, 1, 2, \ldots$$

Cela est bien sûr impossible, puisqu'on ne peut diviser indéfiniment par 2 un entier non nul. Il ne reste que la possibilité $(a, b,c) = (0,0,0)$.

6) (Le professeur écartelé)

Un professeur a 40 étudiantes et étudiants dont les noms sont consignés sur deux listes de 20 noms. Après un examen, il doit transcrire les notes des étudiants (dont la répartition est aléatoire) sur les 2 listes. Il commence avec la liste 1 et change de liste à chaque fois que cela est nécessaire. Quel est le nombre moyen de changements de liste ?

Solution 1.

Soit, pour $k = 2, 3, \ldots, 40$, la variable aléatoire

x_k définie par

$$x_k = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si l'on change de liste en passant de la } (k-1)^e \text{ copie à la } k^e. \\ \mathbf{0} & \text{si non.} \end{cases}$$

soit aussi

$$x_1 = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si la } 1^{\text{ère}} \text{ copie est dans la } 2^{\text{e}} \text{ liste.} \\ \mathbf{0} & \text{si la } 1^{\text{ère}} \text{ copie est dans la } 1^{\text{ère}} \text{ liste.} \end{cases}$$

Alors l'espérance de x_k, c'est-à-dire le nombre moyen de changements de listes entre la $(k - 1)^e$ et la k^e copie est donnée par

$$E(x_k) = P(x_k = 1) = 2\,\frac{\binom{38}{19}}{\binom{40}{20}} = \frac{20}{39}$$

$$E(x_1) = \frac{1}{2}\,.$$

$$\text{Donc } E(x) = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{20}{39} + \ldots + \frac{20}{39}}_{39 \text{ fois}} = 20{,}5$$

Note:

On peut «visualiser» le calcul de $E(x_k)$ comme suit: l'espace échantillon, soit celui de toutes les listes possibles est l'ensemble des situations du genre

$$\underline{1}\ \underline{1} \ldots \underline{2}\ \underline{1} \ldots \underline{1}\ \underline{2}\ \underline{2} \text{ ou } \underline{2}\ \underline{1} \ldots \underline{1}\ \underline{1} \ldots \underline{2}\ \underline{2}\ \underline{1} \text{ etc...}$$

il y a $\binom{40}{20}$ telles situations.

Si l'on change de liste entre k - 1 et k, alors on aura l'une des 2 situations suivantes :

$$\_\ \_ \cdots \underline{2}\ \underline{1} \cdots \_\ \_$$

$$\_\ \_ \cdots \underline{1}\ \underline{2} \cdots \_\ \_$$

Dans chacun de ces deux cas, 38 sites sont libres, avec dix-neuf 1 et dix-neuf 2. L'ensemble de ces situations comprend donc $\binom{38}{19} + \binom{38}{19}$ éléments.

Solution 2.

Soit m_k le nombre moyen de changements de liste en passant de la $(k - 1)^e$ copie à la k^e.

Alors $m_1 = \frac{1}{2}$; par ailleurs, pour $2 \le k \le 40$, on a

Prob ($(k - 1)^e$ copie dans liste 1 et k^e copie dans liste 2)

$$= \frac{20}{40} \times \frac{20}{39} = \frac{10}{39};$$

Prob ($(k - 1)^e$ copie dans liste 2 et k^e copie dans liste 1)

$$= \frac{10}{39} \text{ également.}$$

Le nombre moyen de changements de liste en passant de la $(k - 1)^e$ copie à la k^e est donc

$$\frac{10}{39} + \frac{10}{39} = \frac{20}{39},$$

et le nombre moyen total est, encore ici, de 20,5.

LISTE DES GAGNANTES ET DES GAGNANTS CONCOURS MATHÉMATIQUES DE L'AMQ 1993, AU COLLÉGIAL

1er prix
Rajesh J. PEREIRA — Collège Marianopolis (Montréal)
Prix de l'AMQ 250$
Une calculatrice TI-85, don de Texas Instruments

2e prix
Martin AYMOT — Campus Notre-Dame-de-Foy (St-Augustin de Desmaures)
Prix du vice-doyen des Sciences de l'UQAM 150$
Une calculatrice TI-68, don de Texas Instruments

3e prix
François LABELLE — Cégep de Rosemont (Montréal)
Prix du vice-doyen des Sciences de l'UQAM 100$

4e prix (ex aequo) (75$)
Madeleine GAWRYS — Collège Stanislas (Montréal)
Marie-Ève LACHANCE — Collège Mérici (Québec)
Isabelle DÉCHÈNE — Campus Notre-Dame-de-Foy

7e prix (ex aequo) (50$)
Charles DE LÉAN — Collège Stanislas (Montréal)
Frédéric MÉRETTE — Collège Mérici (Québec)

6 mentions honorables (25$)
Magdalena BALAZINSKA — Collège Stanislas (Montréal)
François GARIÉPY — Cégep Montmorency (Laval)
Téodor SIMION — Collège Marie-de-France (Montréal)
Marcus HUM — Champlain Regional Collège (St-Lambert)
Louis-Antoine BLAIS-MORIN — Cégep de la Gaspésie et des Îles
Jérôme PANSERA — Collège Mérici (Québec)

** Ces gagnantes, gagnants se méritent aussi un T-Shirt TI-68, don de notre commanditaire, Texas Instruments.*