JEUX ET PROBLÈMES

n-Marie Labrie,
iversité de Sherbrooke

La plupart des enseignantes et enseignants sont d'accord pour dire que la méthodologie de la résolution de problèmes développe un grand nombre d'habiletés mentales. Depuis une quinzaine d'années, les articles sur la résolution de problèmes parlent de sept habiletés principales que voici :

1. Comprendre et formuler la question d'un problème.
2. Comprendre les conditions du problème.
3. Choisir ou trouver les données utiles pour résoudre le problème.
4. Décrire des sous-problèmes et choisir les stratégies appropriées pour les résoudre.
5. Développer adéquatement les stratégies de solution.
6. Présenter la réponse en fonction des données du problème.
7. Vérifier si la réponse ou la solution est plausible et a du sens.

Dans cette chronique, nous continuons à proposer des jeux et problèmes non traditionnels qui font appel à l'imagination et à des notions mathématiques élémentaires. Pour les problèmes 96 à 100, c'est le professeur Maurice Brisebois qui suggère des solutions et nous le remercions bien sincèrement de sa contribution. Merci également à tous nos lecteurs et lectrices qui nous écrivent pour nous encourager à continuer cette chronique.

Veuillez adresser toute correspondance à:

Jean-Marie Labrie
1431, rue Gauvin
Sherbrooke J1K 2J2

Problème 96 - Une curiosité !

Quel est le nombre positif tel que son cinquième multiplié par son huitième donne ce nombre?
Y a-t-il une règle générale?

Solution suggérée par Maurice Brisebois

Si x est un nombre réel positif, alors l'équation

$$\frac{x}{5} \times \frac{x}{8} = x \quad \text{donne} \quad x = 0 \text{ ou } x = 40$$

et on voit que x ne peut être qu'un nombre entier. En utilisant le théorème fondamental de l'arithmétique, on peut exprimer x d'une manière unique à l'ordre des termes près comme

$$\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$$

où $p_1, \ldots, p_k$ sont des entiers positifs premiers affectés d'exposants $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ entiers positifs appropriés.

On peut, par la suite, écrire :

$$\frac{x}{p_1^{\alpha_1}} \times \frac{x}{p_2^{\alpha_2}} \times \ldots \times \frac{x}{p_k^{\alpha_k}} = \frac{x^k}{\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}} = \frac{x^k}{x} = x^{k-1}$$

En posant k = 2, on retrouve le cas décrit dans l'énoncé ci-haut. Toutefois, il n'est pas nécessaire d'utiliser le théorème fondamental de l'arithmétique afin d'obtenir une solution de ce problème. Ainsi, en écrivant $x = x_1x_2$ avec x_1x_2 entiers quelconques, on voit que

$$\frac{x}{n_1} \times \frac{x}{n_2} = x \quad \text{avec} \quad x = n_1n_2 .$$

Enfin, si $d_1, d_2, \ldots, d_\ell$ sont les diviseurs d'un entier x quelconque (à l'exclusion de 1 et de x lui-même), alors

$$\prod_{i=1}^{\ell} \frac{x}{d_i} = \frac{x^\ell}{\prod_{i=1}^{\ell} d_i} = \frac{x^\ell}{x^{\ell/2}} = x^{\ell/2}$$

car les diviseurs peuvent être jumelés par paires.

Problème 97 - Est-ce possible?

Si un sixième de 20 est 4. Quel est le quart de 10?

Solution suggérée par M. Brisebois

Il s'agit ici de déterminer une base «a» telle que $(24)_{10} = (20)_a$. Choisissant a = 12, le problème est résolu puisqu'alors $\frac{1}{4}(10)_{12} = 3$

Je note en passant que le quart de $(20)_{12} = 6$, ce qui peut ne pas paraître étonnant puisque $(20)_{12} = 2 \times (10)_{12}$.

Problème 98 - Les régularités!

Quel est le terme général qui engendre chacune des suites suivantes?

a. 0, 3, 26, 255, 3 124,...
b. 2, 17, 82, 257,...

Solution suggérée par M. Brisebois

Le terme général $U_n = n^n - 1$ pour $\geqslant 1$ engendre la suite donnée en a. et le terme général $\sqrt{n} = n^4 + 1$ pour $n \geqslant 1$ engendre la suite donnée en b.

Malheureusement, il existe d'autres suites qui admettent les premiers termes donnés ci-haut comme premiers termes; par exemple, la suite $w_n = 10n^3 - 35n^2 + 50n - 23$ admet 2, 17, 82, 257 comme premiers termes.

Il m'apparaît plus approprié de remplacer l'expression «<u>le</u> terme général» par «<u>un</u> terme général» dans l'énoncé du problème. Je rappelle au lecteur que j'ai déjà présenté une famille de solutions dans le cadre d'un problème semblable dans le numéro d'octobre 1988 (p. 29) du *Bulletin AMQ.*

Problème 99 - La notion «entre»!

a. Combien y a-t-il de nombres naturels entre l carré de 500 000 et le carré de 500 001?

b. Combien y a-t-il de nombres naturels entre l cube de 1 000 et le cube de 1 0001?

Solution proposée par M. Brisebois

a. Puisque $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ pour a et b réels quelconques, on a ici

$500\,001^2 - 500\,000^2 =$

$(500\,001 + 500\,000)(500\,001 - 500\,000) =$

$1\,000\,001.$

Il y a donc 1 000 000 entiers naturels entre l carré de 500 000 et le carré de 500 001.

b. Comme $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ pour a e b réels quelconques, on aura dans ce cas:

$1\,000^2 + (1\,000)(1\,001) + 1\,001^2$ entier naturels entre le cube de 1 000 et le cube de 1 001; ce qui donne 3 003 000 entiers naturels.

N.B. Ce problème constitue une intéressant application de la mise en facteurs en algèbre.

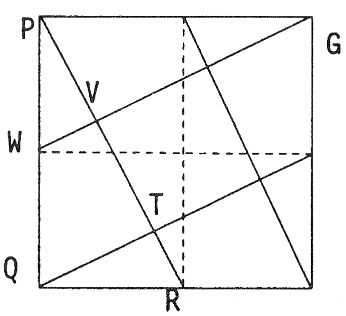
Problème 100 - Le théorème de Pythagore aux Indes

Dans le livre de Charles Hutton (1737 - 1823) on a exposé les écrits de Bhaskara (1114 - 1185?), mathématicien indien.

L'un des travaux de Bhaskara est intitulé «Lilavati», nom de sa fille. Il démontre entre autres, la 47e proposition d'Euclide qui est, en fait, le théorème de Pythagore. Il utilise la figure ci-dessous formée de triangles rectangles égaux réunis de la manière indiquée. La mesure du grand carré est a. Le grand carré est formé de quatre carrés égaux dont le côté est b. Comment Bhaskara a-t-il montré la relation de Pythagore?

Solution proposée par M. Brisebois

Dans son ouvrage, ***«Great Moments in Mathematics before 1950»*** Eves reproduit, dans les pages 29 à 34, deux preuves du théorème de Pythagore données par Bhaskara: une preuve où ce dernier utilise les propriétés de similitude des triangles semblables et une autre où il utilise une dissection essentiellement identique à celle indiquée dans ce problème. Eves rappelle que, dans ce dernier cas, Bhaskara se limite à présenter le graphique de la dissection accompagnée du seul mot : «Voyez». Eves propose dans son texte une preuve qui pourrait être de Bhaskara et j'invite le lecteur à consulter cet intéressant ouvrage. Mais je préfère présenter une autre preuve qui aurait pu être construite par Bhaskara puisque fondée sur la formule de l'aire d'un triangle rectangle et sur celle d'un trapèze.



Ma preuve consiste à utiliser le fait que l'aire du triangle rectangle PQR est égale à

$$\frac{(2b)(b)}{2} \text{ ou } b^2$$

d'une part et d'autre part, elle est aussi égale à la somme des aires des triangles rectangles PWV et QRT et de l'aire du trapèze QTVW.

Notons que les triangles rectangles PWV et QRT sont égaux. On a :

$$\overline{PV} \cong \overline{VT} \text{ et } \overline{PV} \cong 2\overline{WV}$$

en vertu de la similitude des triangles PMW et PQT et du fait que, par construction, $\overline{PW} \cong \overline{WQ}$. En posant $\overline{PV} = m$, on peut écrire :

Aire du triangle PQR

$= b^2$

$= 2$(Aire du triangle PWV)
+ aire du trapèze WQTV

$= 2(\frac{1}{2} m \times \frac{m}{2}) + m(\frac{1}{2} \times (\frac{m}{2} + m))$

$= \frac{m^2}{2} + \frac{3m^2}{4}$

$= \frac{5m^2}{4}$

Or, $\overline{PR} = m + m + \frac{m}{2} = \frac{5m}{2}$.

Donc, $\overline{PR} = \frac{25m^2}{4} = 5b^2 = (2b)^2 + b^2$

ce qui achève la démonstration.

Nouveaux problèmes

Problème 101 - Les nombres premiers entre 0 et 100

Quels sont les deux derniers chiffres du produit des 25 premiers nombres premiers?

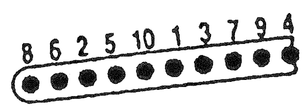
Problème 102 - Une suite particulière

Quels sont les quatre nombre manquants dans la suite ci-dessous?

103, 107, 115, 122, 127, 137, ..., ..., ..., ..., ..., 199, 218, 229, 242, 250, 257, 271, 281, 292.

Problème 103 - Jeu du tapis roulant

Dix cartons sont placés sur un tapis roulant comme l'indique la figure ci-dessous:



Le bras mécanique utilisé pour les classer par ordre numérique de la gauche vers la droite peut prendre 3 cartons adjacents et les placer en haut à droite du tapis roulant alors que les autres cartons glissent pour fermer la brèche. Pouvez-vous classer les 10 cartons en moins de 7 mouvements? Si oui, comment?
(Bulletin de l'APMEP, déc. 1992, p. 542)

Problème 104 - La boîte de forme cubique

Déterminer toutes les façons de défaire une boîte de forme cubique, présentées sous la forme d'hexominos.