Le calcul du développement décimal de π

Il y a plus de deux mille ans, les géomètres grecs avaient remarqué que la circonférence d'un cercle divisée par son diamètre égale toujours le même nombre constant quel que soit le diamètre du cercle. On a coutume de désigner ce nombre par la lettre π. On peut donc poser la définition

$$\pi = \frac{\text{circonférence du cercle}}{\text{diamètre du cercle}}$$

Les mathématiciens s'intéressent depuis ce temps au calcul des décimales de ce nombre π. On peut diviser l'histoire de cette recherche en trois étapes.

Première étape : *Méthodes géométriques*

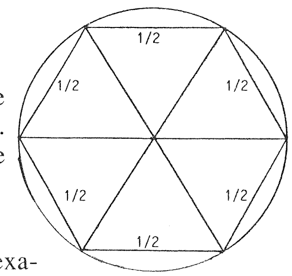
Au premier siècle avant notre ère, Archimède avait utilisé une méthode géométrique pour trouver la valeur de π.

Il est arrivé au résultat suivant :

$$3\frac{10}{71} < r < 3\frac{1}{7}$$

Sa méthode consistait à inscrire un polygone régulier dans un cercle et à doubler le nombre de côtés plusieurs fois. Alors le périmètre du polygone augmente et devient très près de la circonférence.

Exemple de calcul :



Prenons un cercle de diamètre égal à 1 unité. Inscrivons un hexagone régulier dans ce cercle.

Le périmètre de cet hexagone égale 3 unités.

Il y a une formule qui permet de calculer la longueur des côtés si on double leur nombre.

$$(C_{2n})^2 = \frac{(C_n)^2}{2 + 2\sqrt{1-(C_n)^2}}$$

C_n = côté d'un polygone inscrit
C_{2n} = côté d'un polygone inscrit ayant 2 fois plus de côtés

En utilisant cette formule, on peut calculer la longueur du côté d'un polygone de 12 côtés.

$$(C_{12})^2 = \frac{(C_6)^2}{2 + 2\sqrt{1-(C_6)^2}} = \frac{(0,5)^2}{2 + 2\sqrt{1-(0,5)^2}} = 0,066\ 987$$

Donc $C_{12} = 0,258\ 819$ et le périmètre $P_{12} = 12 \times (C_{12}) = 3,105\ 828$

Si on répète ce procédé, on obtient les résultats suivants :

	Longueur du côté	Périmètre du polygone
24 côtés	$C_{24} = 0,130\ 526$	$P_{24} = 24 \times (C_{24}) = 3,132\ 629$
48 côtés	$C_{48} = 0,065\ 403$	$P_{48} = 48 \times (C_{48}) = 3,139\ 351$
96 côtés	$C_{96} = 0,032\ 719$	$P_{96} = 96 \times (C_{96}) = 3,141\ 043$
192 côtés	$C_{192} = 0,016\ 361$	$P_{192} = 192 \times (C_{192}) = 3,141\ 396$
384 côtés	$C_{384} = 0,008\ 181$	$P_{384} = 384 \times (C_{384}) = 3,141\ 542$
3072 côtés	$C_{3072} = 0,001\ 023$	$P_{3072} = 3072 \times (C_{3072}) = 3,141\ 591$

On peut remarquer que plus le nombre de côtés augmente, plus la valeur du périmètre du polygone vient près de π.

Vers les années 1 500, grâce au progrès dans la notation des nombres, on s'est de nouveau intéressé au calcul de la valeur de π.
Voici quelques résultats :

Viète	1 579	10 chiffres
Romanus	1 593	16 chiffres
Van Ceulen	1 610	33 chiffres
Snell	1 621	35 chiffres

Pour obtenir ce résultat, Snell a utilisé un polygone de 2^{30} côtés !

Deuxième étape : *La méthode des séries*

Avec le développement du calcul différentiel et intégral, on a appris à calculer avec les séries. Ce procédé a permis de trouver la valeur de π avec des calculs moins longs.

Voici quelques-unes des premières séries utilisées :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \ldots \qquad \text{(Gregory, 1 671)}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots \qquad \text{(Euler, 1 736)}$$

$$\pi = 2\sqrt{3}\,\left(1 - \frac{1}{3 \times 3} + \frac{1}{5 \times 3^2} - \frac{1}{7 \times 3^5} + ..\right) \qquad \text{(Sharp, 1 717)}$$

$$\pi = 16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \times 5^3} + \frac{1}{5 \times 5^5} - \frac{1}{7 \times 5^7} + \frac{1}{9 \times 5^9} - \ldots\right)$$

$$-4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \times 239^3} + \frac{1}{5 \times 239^5} - \ldots\right) \qquad \text{(Machin, 1 706)}$$

En utilisant les séries, on a obtenu les résultats suivants :

Sharp	1 699	72 chiffres
Machin	1 706	101 chiffres
Vega	1 794	137 chiffres
Gauss	1 844	201 chiffres
Rutherford	1 853	441 chiffres
Shanks	1 871	527 chiffres

On effectue ces calculs parce que l'on cherche la réponse à des questions théoriques.

D'abord, on veut savoir si le nombre π est rationnel, c'est-à-dire s'il égale le quotient de deux nombres entiers. En 1 761, le mathématicien allemand Lambert a prouvé que π est irrationnel.

On se demande aussi si le nombre π peut être la solution d'une équation du type :

$$\pi^2 = 10\,; \quad 22\,\pi^4 = 2\,143\,;$$
$$9\,\pi^4 - 240\,\pi^2 + 1\,492 = 0$$

En 1882, le mathématicien Lindemann a prouvé que ce n'est pas possible. Alors on a cessé de s'intéresser aux décimales de π, pour quelques années !

Troisième étape : *Les ordinateurs*

Le développement des ordinateurs a de nouveau attiré l'attention des mathématiciens (et des informaticiens !) sur le calcul de la valeur du nombre π.

En 1 949, on obtint 2 037 chiffres avec l'ordinateur ENIAC qui a calculé pendant 70 heures. En 1959, à Paris, on s'est rendu à 10 000 chiffres avec un IBM 704.

Au cours des trente dernières années, le nombre de chiffres calculés a augmenté de façon étonnante grâce aux progrès dans la puissance des ordinateurs et dans les formules utilisées pour trouver la valeur de π.

Les Japonais et les Américains sont en compétition pour ajouter des chiffres au précédent« record ». C'est devenu un moyen pour illustrer la puissance de calcul de leurs ordinateur.

En 1 987, le Japonais Yasumasa Kanada a calculé 134 millions de chiffres. En 1 988, il s'est rendu à 201 millions.

En 1989, les frères David et Gregory Chudnovsky des États-Unis ont battu tous les records en obtenant 1 011 196 691 chiffres. Pour écrire ce nombre sur du papier pour imprimante, il faut un « paquet » de feuilles d'une hauteur de 125 pieds de haut. Si on utilise des microfilms, leur poids atteint 45 kilos !

La méthode des frères Chudnovsky est nouvelle. Leur formule donne plusieurs chiffres à chacune des utilisations et les résultats déjà obtenus servent pour continuer les opérations, ce qui n'est pas le cas pour les autres formules qui demandent de reprendre les calculs au tout début si l'on veut ajouter des chiffres au résultat déjà calculé.

La formule Chudnovsky est complexe :

$$\sum_{n=o}^{\infty} [c_1 + \mathrm{n}] \cdot \frac{(6n)!}{(3n)!n!^3} \frac{(-1)^n}{(640{,}320)^{3n}} = \frac{(640{,}320)^{3n}}{163 \cdot 8 \cdot 27 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 127} \cdot \frac{1}{\pi}$$

$$c_1 = \frac{13{,}591{,}409}{163 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 127}$$

Par exemple, si on fait n = 0 dans la formule, on trouve :

$$\pi = 3{,}141\ 591 \ldots \ldots$$

On continue à se poser des questions théoriques sur la nature du nombre π. Par exemple on se demande si les 10 chiffres du développement décimal sont distribués au hasard, s'il est possible de trouver cent zéros consécutifs, etc.

Et la recherche continue...