Jean-Marie Labrie
Professeur
Faculté d'éducation
Université de Sherbrooke
Sherbrooke J1K 2K1

JEUX ET PROBLÈMES

Cette chronique dure depuis 10 ans. Madame Louise Trudel, présidente de l'AMQ d'alors, m'avait demandé d'être responsable de cette nouvelle chronique. Si elle a duré c'est grâce à tous les membres de l'AMQ qui ont collaboré assidûment et qui m'ont toujours encouragé à poursuivre. Le NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) propose dans le livre **How to Evaluate Progress in Problem Soving** plusieurs méthodes dans le contexte de la résolution de problèmes. À la page 30, on propose une échelle d'évaluation en trois phases :

1er : Compréhension du problème :
- 0 : incompréhension complète du problème
- 1 : Partie du problème mal comprise ou mal interprétée
- 2 : Compréhension complète du problème

2e : Planification de la solution : stratégies et approches
- 0 : Aucun essai ou stratégie totalement inappropriée
- 1 : Stratégie partiellement correcte basée sur une partie du problème qui a été interprétée correctement
- 2 : Stratégie pouvant conduire à une solution correcte si elle est développée convenablement

3e : Présentation de la solution
- 0 : Aucune réponse fautive basée sur une stratégie inappropriée
- 1 : Erreur de transcription; erreur de calcul; réponse partielle pour un problème avec plusieurs réponses
- 2 : Réponse adéquate avec référence aux données du problème et aux bonnes unités.

Dans ce type d'évaluation, l'élève peut obtenir jusqu'à 6 points; dans cette évaluation, il est rare qu'un élève n'obtient aucun point.

SOLUTIONS SUGGÉRÉES AUX PROBLÈMES PROPOSÉS PRÉCÉDENTS

PROBLÈME 80 : Jeu de billard

Nous avons eu beaucoup de commentaires sur ce jeu. Monsieur Jacques Sormany fait remarquer qu'il n'existe pas de formule générale donnant directement le nombre de solutions. Dans le numéro d'octobre 1991, vous avons donné les 47 solutions. Nous savons que les 3 boules du centre, les 3 du sommet et les 3 autres boules de chacun des trois côtés peuvent être permutées indépendamment; nous avons donc $(3\,!)^5$ ou 7 776 façons distinctes de les placer; par conséquent, le nombre total d'arrangements possibles est :

$$47 \times 7776 \text{ ou } 365\,472.$$

Finalement,

1) il faut diviser par 2 ce nombre si l'on considère les solutions symétriques comme non distinctes.

2) il faut diviser par 2×3 si l'on veut éliminer les symétries et les rotations.

PROBLÈME 81 (Déc. 1990, p. 14)
(proposé par J. Sormany)

a. Un tiroir contient pêle-mêle 2n chaussettes formant « n » paires de r couleurs différentes. Une panne de courant plonge soudain la pièce dans l'obscurité complète. Combien de chaussettes faut-il prendre à l'aveuglette pour être sûr d'en avoir au moins « p » paires non dépareillées ? ($p \leq r \leq n$)

b. Même problème avec des gants.

Solutions : a. $r + 2p - 1$
b. $n + p$

PROBLÈME 84bis (une variante)
(Mars 1991, p. 35)

Les mathématiciens B, C et D sont placés face à face (chacun voit les 2 chapeaux autres que le sien). Le plus intelligent sera le premier à deviner la couleur de son chapeau. Au bout d'une minute environ, D devine la couleur de son chapeau. Quelle est cette couleur ?

Solution suggérée (J. Sormany)

Il n'y a pas deux chapeaux rouges, car alors celui qui a un chapeau vert aurait pu déduire immédiatement la couleur du sien. Il y a donc au plus un chapeau rouge. Sachant cela, quiconque voit un chapeau rouge devant lui peut deviner que le sien est vert. Si, au bout d'une minute, personne n'a rien deviné, c'est que les trois chapeaux sont verts.

PROBLÈME 83
(Mars 1991, p. 35)

Pour ce problème, j'ai eu beaucoup de commentaires. Au mois de mai 1991, p. 45, j'ai donné une solution pour la construction de 100 carrés dans un grand carré ayant 16 de côté.

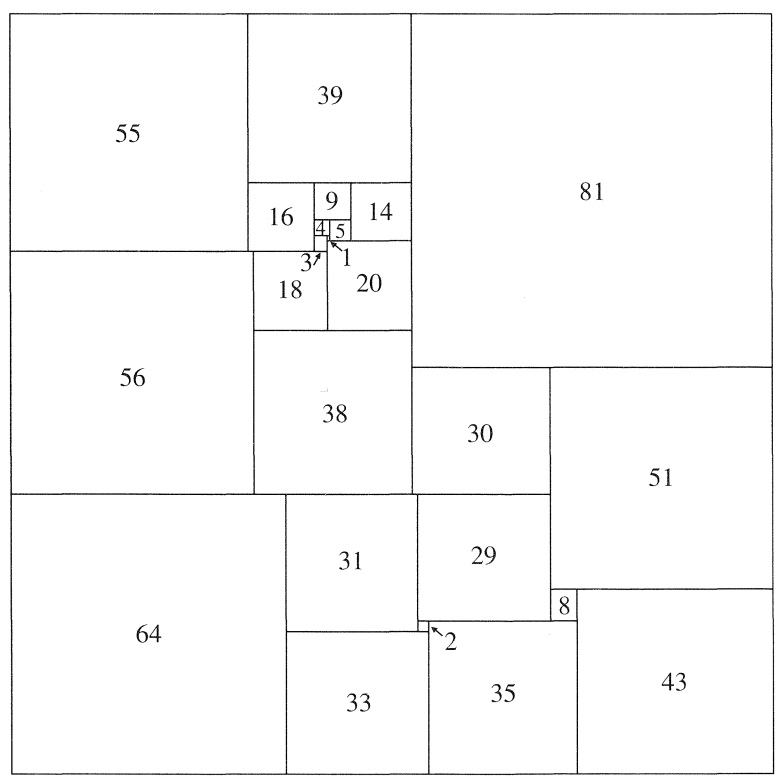
Monsieur Jacques Sormany donne plusieurs solutions de la construction de 10 carrés dans un carré 4 sur 4. Il propose d'examiner les solutions de la construction de 10 carrés dans différents carrés : 5×5, 6×6, 7×7, 8×8, etc.

On peut recommencer le même raisonnement avec la construction de 11 carrés avec différents carrés; par exemple 7×7.

C'est un problème de découpage et ce type de problème ne semble pas soumis à aucune règle. Souvent, chaque solution est particulière et chaque problème doit être traité individuellement.

Dans le livre **Mathématiques de demain** de C. S. OGILVY, à la page 56, on demande de découper un carré en 24 carrés plus petits, tous de grandeur différente. Est-ce possible de le découper en moins de 24 carrés, tous différents ?

La solution des 24 carrés différents dans un même carré est donnée à la page 57 dont voici la représentation :



PROBLÈME 91
(Oct. 91, p. 45)

Trouver les multiples de 24, inférieurs à 2424, qui ont exactement 24 diviseurs.

Solution (Charles-E. Jean)

Décomposons 24 de diverses façons : 24×1, 12×2, 8×3, 6×4, $6 \times 2 \times 2$, $4 \times 3 \times 2$, $3 \times 2 \times 2 \times 2$

Un entier $a^i \times b^j \times c^k$... a 24 diviseurs si $(i + 1)(j + 1)(k + 1)... = 24$

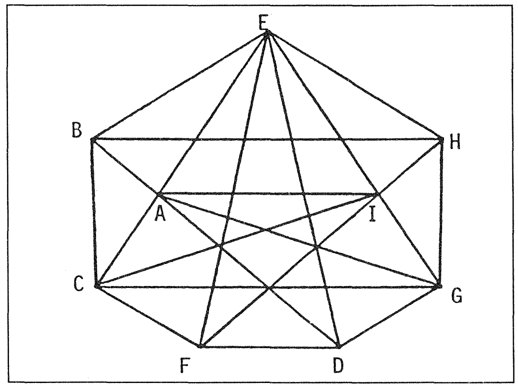
Cherchons donc les entiers qui satisfont à cette dernière condition tout en ayant $2^3.3$ comme facteur et en étant inférieurs à 2424.

24 x 1	Aucune solution			0
12 x 2	Aucune solution			0
8 x 3	$2^7 \times 3^2 = 1152$			1
6 x 4	$2^5 \times 3^3 = 864$	$3^5 \times 2^3 = 1944$		2
6 x 2 x 2	$2^5 \times 3 \times 5 = 480$	$2^5 \times 3 \times 7 = 672$	$2^5 \times 3 \times 11 = 1056$	
	$2^5 \times 3 \times 13 = 1248$	$2^5 \times 3 \times 17 = 1632$	$2^5 \times 3 \times 19 = 1824$	
	$2^5 \times 3 \times 23 = 2208$			7
4 x 3 x 2	$2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$	$2^3 \times 3^2 \times 7 = 504$	$2^3 \times 3^2 \times 11 = 792$	
	$2^3 \times 3^2 \times 13 = 936$	$2^3 \times 3^2 \times 17 = 1224$	$2^3 \times 3^2 \times 19 = 1368$	
	$2^3 \times 3^2 \times 23 = 1656$	$2^3 \times 3^2 \times 29 = 2088$	$2^3 \times 3^2 \times 31 = 2232$	9
	$2^3 \times 5^2 \times 3 = 600$	$2^3 \times 7^2 \times 3 = 1176$		2
3 x 2 x 2 x 2	Aucune solution			0
		TOTAL :		21

Les 21 multiples de 24 sont donc : 360, 480, 504, 600, 672, 792, 864, 936, 1056, 1152, 1176, 1224, 1248, 1368, 1632, 1656, 1824, 1944, 2088, 2208, 2232.

PROBLÈME 92
(Oct. 91, p. 45)

Placer un entier différent de 1 à 9 sur chacun des neuf sommets identifiés par une lettre, de telle manière que la somme des nombres soit la même sur chacun des huit triangles suivants : ABC, ADG, AEI, BEH, CEG, CFI, DEF, et GHI.



Solution (Charles-E. Jean)

La somme des entiers de 1 à 9 est 45. L'ensemble des nombres peut être partagé en trois triangles, par exemple, ABC, DEF et GHI. La somme sur chacun de ces triangles est 45/3 ou 15.

E est égal à 5, car quatre triangles ont le sommet E et seul 5 apparaît quatre fois dans les combinaisons des nombres de 1 à 9 dont la somme est 15. Les entiers pairs correspondent aux sommets A, C, G, I car chacun apparaît trois fois dans les combinaisons. Les entiers impairs, sauf 5, seront placés sur les sommets B, D, F, H. Avec ces données, on peut trouver huit solutions. En voici une :

$$A = 8, B = 1, C = 6, D = 3,$$
$$E = 5, F = 7, G = 4, H = 9, I = 2.$$

On aura reconnu une figure isomorphe au carré magique d'ordre 3. Toutefois, peut-on affirmer que les huit solutions sont équivalentes comme dans le carré magique ?

PROBLÈME 93

(Oct. 91, p. 45)

Dans la revue du NCTM : *Mathematics Teacher, mai 1991, Vol. 81, no 5, p. 309*, on propose de généraliser le théorème de Pick qui donne la formule de l'aire d'un polygone dans un pointé ayant comme unité d'aire un petit carré (Fig. 1)

$$A = \frac{q}{2} + (p - 1)$$

où p est le nombre de points à l'intérieur du polygone et q est le nombre de points sur les côtés du polygone.

Si l'unité d'aire est un petit triangle (Fig. 2) ou si l'unité d'aire est un petit trapèze (Fig. 3), que devient la formule de Pick ?

Quelle serait la formule générale pour toute unité d'aire ?

Solution suggérée :

La formule généralisée de Peck est :

$$A = \frac{p + 2(q - 1)}{r - 2}$$

A : aire p : nombre de points sur la frontière
q : nombre de points à l'intérieur
r : type d'unités

Exemples : triangle comme unité r = 3
carré comme unité r = 4
trapèze comme unité r = 4
pentagone : r = 5

Fig. 2 r = 3
A = 6

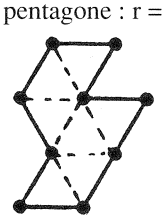


Fig. 1 r = 4
A = 5

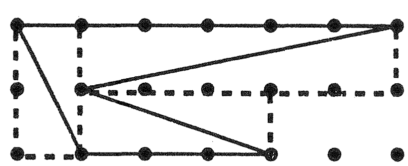
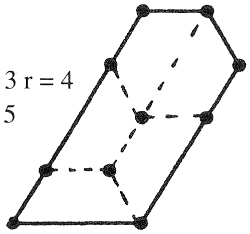
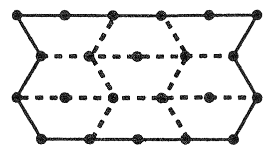


Fig. 3 r = 4
A = 5



Dans la figure ci-dessous, l'unité d'aire est un trapèze isocèle dont r = 5



A = 9

Nouveaux problèmes

PROBLÈMES 94

(primaire et premier cycle du secondaire)

Jeu de poches (9 trous)

1 trou de 500 points; 2 trous de 100 points
2 trous de 50 points et 4 trous de 25 points

Vous lancez trois poches et miracle ! elles sont tombées dans un trou. Quel est le nombre total de situations différentes pour lesquelles on réalise un tel exploit ?

Expliquez comment vous obtenez ce nombre.

PROBLÈME 95

(Proposé par Charles-E. Jean)

Dans le **Dictionnaire des mathématiques** (Bouvier, A. et George, M., PUF, 1979), on trouve, à la page 4 sous la rubrique **Abondant**, que le plus petit abondant impair est 10 665

a. Vérifier que 10 665 n'est pas un nombre abondant.

b. Trouver les dix plus petits nombres abondants impairs.

Un nombre abondant est un entier naturel n tel que n est plus petit que la somme des diviseurs de n, autres que n. Ainsi, 18 est abondant. Ses diviseurs, autres que 18, sont 1, 2, 3, 4, 6 et 9. Leur somme est 25.

Veuillez envoyer toute correspondance à :

Jean-Marie Labrie,
1431 rue Gauvin,
Sherbrooke,
J1K 2J2.