Comment tracer des graphes pendant deux heures sans se fatiguer...

Jean-Denis Groleau, Ghislaine Neveu
Collège Jean-de-Brébeuf

Nous vous présentons un travail de recherche entrepris au collège Jean-de Brébeuf dans des classes d'étudiants inscrits en première année Sciences Humaines. Le but est de faire acquérir à l'étudiant des habiletés lui permettant de construire ou de tracer le graphe d'une fonction donnée d'une façon "intuitive".

Dans un premier temps, notre objectif est de vérifier si la notion de graphe de fonction du premier degré est comprise. En général une question aussi élémentaire ne provoque aucune excitation intellectuelle qui nous permette d'aller très loin. Et pourtant... Nous avons suscité chez l'étudiant un intérêt tout nouveau. Demander à l'étudiant de tracer le graphe de la fonction f définie par:

$$f(x) = x \text{ ou } f(x) = x + 1$$

ne cause évidemment pas de difficulté. Cependant, poser le problème de la façon suivante est bien différent:

soit $f(x) = x$, tracer le graphe des fonctions,

a) $g(x) = f(x)$

b) $g_1(x) = f(x) + 1$

c) $g_2(x) = f(x + 1)$

et comprendre la subtilité graphique rattachée à chacune de ces questions fait partie des objectifs que nous nous fixons. Notre approche est très visuelle, intuitive et fort différente de l'éternel "tableau de valeurs":

x	y
..	..

Nous serons amené dans plusieurs situations à faire l'étude du graphe d'une fonction en considérant:

premièrement	
- les valeurs de x,	$0 \leq x \leq 1$
par la suite	
- les valeurs de x,	$x \geq 1$
- les valeurs de x,	$x \in \Re$

Construisons le graphe de:

$y = x$, $\quad y = f(x) + 1 \quad$ et $\quad y = f(x + 1)$

c'est-à-dire le graphe de:

$y = x$, $\quad y = x + 1 \quad$ et $\quad y = (x + 1)$

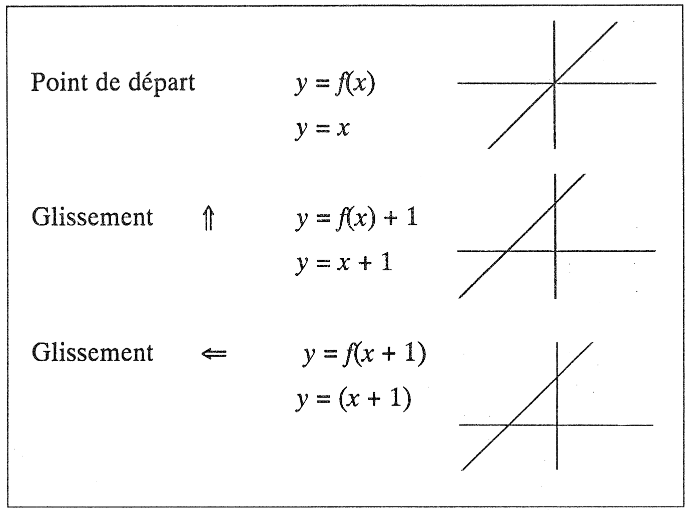


Fig. 1

Évidemment, aucune difficulté majeure à l'horizon. Par la suite, nous construisons le graphe des fonctions de la forme:

$$y = mx, \qquad m \in \Re$$

Ainsi, pour tracer le graphe d'une fonction du premier degré $f(x) = mx + b$, on procède de la façon suivante:

- On trace le graphe de:

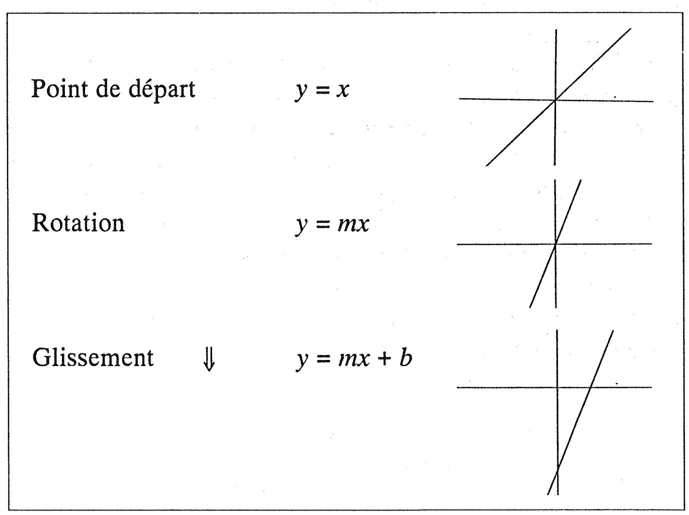


Fig. 2

L'étudiant habile en mathématiques trouve l'approche un peu lourde au début, cependant il en reconnaît très rapidement son efficacité au moment où on doit tracer des graphes plus complexes.

Dans un second temps, nous abordons les fonctions du second degré en prenant bien soin de commencer par le cas le plus élémentaire tout en essayant de dégager le maximum d'informations nous permettant de tracer d'une façon approximative son graphe sans qu'il soit, encore ici, nécessaire de faire un tableau de valeurs.

Traçons le graphe de $f(x) = x^2$

Nous allons tout d'abord décomposer la fonction f comme étant le produit de deux fonctions du premier degré.

Alors $f(x) = x\,x$

Observons le comportement du graphe de f pour certaines valeurs de x

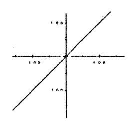
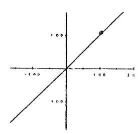
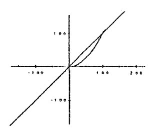
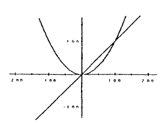
valeurs de x	$x\,x$	graphe de f
si $x = 0$,	$0\,0 = 0$	 $f(x)$
si $x = 1$,	$1\,1 = 1$	 $f(x)$
si $0 < x < 1$,	$x\,x < x$	 $f(x)$
si $x \notin]0,1[$,	$x\,x > x$	 $f(x)$

Fig. 3

Le tracé du graphe de $y = x^2 + 1$ et celui de $y = (x + 1)^2$ se fera en utilisant les mêmes principes, soit un glissement vers le haut ou un glissement vers la gauche à partir du graphe de $f(x) = x^2$.

Par la suite, l'exploitation du tracé des graphes de la forme:

$y = ax^2, a \in \Re$ sera considéré.

Nous pouvons maintenant tracer facilement le graphe d'une fonction du deuxième degré exprimée sous la forme:

$f(x) = a(x - h)^2 + k, \qquad a, h, k \in \Re$

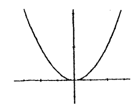
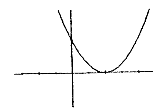
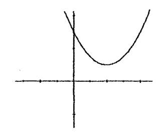
Point de départ		$y = a\,x^2$	 $f(x)$
Glissement	$\Rightarrow$	$y = a(x - h)^2$	 $f(x)$
Glissement	$\Uparrow$	$y = a(x - h)^2 + k$	 $f(x)$

Fig. 4

Si l'équation n'est pas donnée sous la forme $f(x)=a(x - h)^2 + k$, on contourne les **difficultés algébriques** en effectuant un glissement soit vers le haut, soit vers le bas afin d'obtenir une équation du second degré dont l'une des racines est zéro.

Ainsi l'étude du graphe de:

$g(x) = ax^2 + bx + c$, se ramènera à l'étude du graphe de $f(x) = ax^2 + bx$, suivi d'un glissement afin d'obtenir la fonction g.

Traçons par exemple un graphe approximatif de la fonction g définie par:

$$g(x) = 3x^2 + 6x + 2$$

Étudions le graphe de la fonction f, définie par:

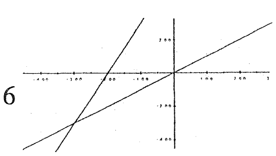
$$f(x) = x(3x + 6)$$

- Les racines de f sont $x = 0$ et $x = -2$,
- L'abscisse du sommet de f est $x = \dfrac{0 + (-2)}{2}$

Donc le graphe de f est

Point de départ $y = x$

on trace: et $y = 3x + 6$



On fait le produit des deux droites

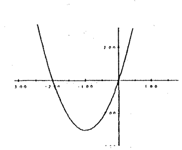


Fig. 5

Pour construire le graphe de

$$f(x) = 3x^2 + 6x + 2,$$

il suffit d'ajouter une étape au processus précédent, soit, un glissement de "2" unités vers le haut au graphe que nous venons de tracer.

D'une façon générale, étant donné une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à trois, il est possible de tracer rapidement un graphe approximatif de cette fonction en la décomposant en éléments plus simples.

Qu'arrive-t-il, dans le cas par exemple de la fonction du troisième degré:

$$f(x) = 2x^3 - 2x + 3 \text{ ?}$$

Nous serions amené à étudier la fonction f comme étant définie par:

$$f(x) = g(x) + 3$$

$$\text{Alors } g(x) = 2x^3 - 2x$$
$$= x(2x^2 - 2)$$

Si nous pouvons tracer un graphe approximatif de g, alors il sera facile de tracer celui de f. À remarquer, g est la fonction obtenue du produit de deux fonctions dont le graphe de chacune de ces fonctions est relativement simple à construire. Quelle que soit la fonction f du troisième degré, il sera possible de la décomposer et de la traduire comme étant égale à:

$$f(x) = g(x) + c$$

où $g(x)$ pourra s'écrire comme le produit suivant:

$g(x) = x$ (polynôme du 2^e degré)

Puisque l'on sait comment tracer le graphe de $y = x$ et aussi celui d'une fonction du deuxième degré, il nous reste à combiner ces deux habiletés. (i.e. faire le produit des deux graphes obtenus afin de construire le graphe de g). Un pas à franchir et nous obtenons une bonne approximation du graphe de f.

Jusqu'à présent nous n'avons jamais fait appel au calcul différentiel pour localiser les sommets des fonctions et nous n'avons aucunement le désir de le faire. Le but est de développer des intuitions, de se poser des questions, de reconnaître la force et la faiblesse d'une telle approche. Les outils que nous fournira le premier cours de calcul différentiel et intégral nous permettra de vérifier dans un premier temps nos intuitions (croissance, décroissance, extremum, point d'inflexion et concavité), et par la suite, de reconnaître la puissance de ces outils pour répondre aux interrogations que nous avons nécessairement eues lors de la construction des graphes.

D'une façon générale toute équation du troisième degré

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

s'écrira de la forme

$$f(x) = g(x) + d$$

où

$$g(x) = x(ax^2 + bx + c)$$

Nous allons tracer le graphe de la fonction f définie par:

$$f(x) = 2x^3 - 2x + 3$$

alors

$$f(x) = x(2x^2 - 2) + 3$$

et

$$g(x) = x(2x^2 - 2)$$

Construisons le graphe de f.

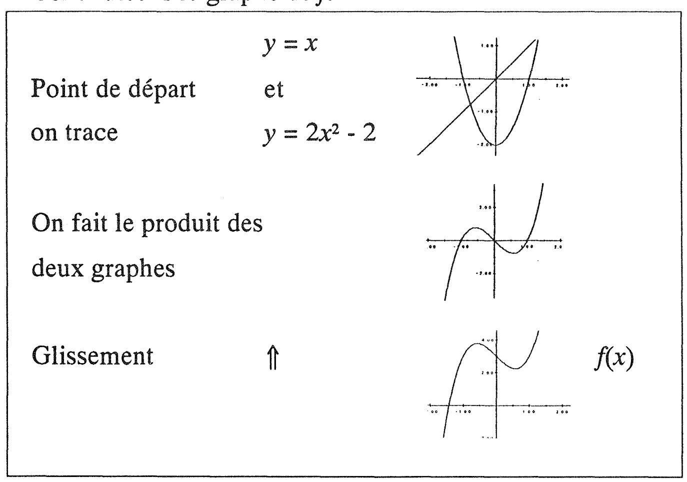


Fig. 6

Observations:

Si l'on construit le graphe d'une fonction f et que cette fonction peut s'écrire comme étant égale au produit de deux fonctions g_1 et g_2 alors:

1 $\quad g_1(a) = 0$ ou $g_2(a) = 0$

$$\Rightarrow f(a) = 0$$

i.e. la droite $y = 0$ nous donne de l'information pour consnstruire le graphe de f.

2 $\quad g_1(a) = 1$ ou $g_2(a) = 1$

$$\Rightarrow f(a) = g_2(a) \text{ ou } g_1(a)$$

i.e. la droite $y = 1$ nous donne de l'information pour construire le graphe de f.

3	Le signe de g_1 et de g_2 nous permet de connaître le signe de *f*.

4	La grandeur du produit de g_1 par g_2 nous permet aussi de connaître la grandeur de *f*.

Ces quelques observations, assaisonnées d'un peu d'intuition, nous permettent de construire un graphe approximatif de la fonction *f* qui se rapproche beaucoup de la réalité.

Nous sommes conscients ici que des questions demeurent en suspens. Par exemple, lorsque l'on fait subir à un graphe une translation verticale, qu'advient-il des racines de cette fonction? La question permet en général d'explorer le nombre maximal et minimal de racines que possède la fonction et d'élaborer sur les méthodes de recherches de racines d'une fonction.

Il faut faire une remarque, la pédagogie utilisée en classe pour le tracé de graphes consiste toujours à décortiquer le problème (le simplifier, le ramener à un problème plus simple que l'on peut résoudre; en d'autres termes, déshabiller le problème et le réhabiller morceau par morceau....).

Cette approche se traduit dans le concret par des exercices du genre:

- Tracer le graphe de $f(x) = 2x + 1$

On construit le graphe de x
le graphe de $2x$
le graphe de $2x + 1$

- Tracer le graphe de $f(x) = x^3$

On construit le graphe de x
le graphe de x^2
le graphe de $x\,x^2$

- Tracer le graphe de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

On construit le graphe de x^2
le graphe de $x^2 + 1$
le graphe de $\dfrac{1}{x^2 + 1}$

Dans la pratique:

- Tracer le graphe de $f(x) = \sqrt{x}$

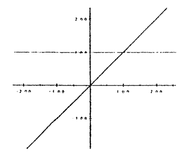
demande dans un premier temps de construire le graphe de $y = x$ et celui de la droite $y = 1$ sur un même système d'axe.

Par la suite, de simples observations nous permettent d'intuitionner le graphe $f(x) = \sqrt{x}$

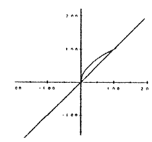
- domaine de f $x \in \Re^+$

donc le graphe de *f* sera

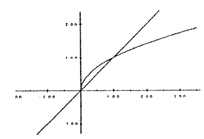
Point de départ $y = x$
et
On trace $y = 1$



si $0 < x < 1$, $x > x$



si $x > 1$, $x < x$



$f(x)$

Fig. 7

De même

- Tracer le graphe de $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

On construit le graphe de x
le graphe de $2x$
le graphe de $2x + 1$
le graphe de $\sqrt{2x + 1}$

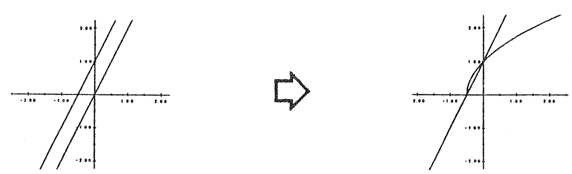


Fig. 8

- Tracer le graphe de $f(x) = |x|$

On construit le graphe de x
le graphe de $|x|$

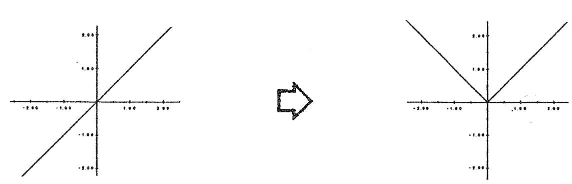


Fig. 9

Par la suite construire le graphe de valeur absolue d'une fonction donnée ne cause pas tellement de difficultés.

- Tracer le graphe de $f(x) = |2x + 1|$

On construit le graphe de x
le graphe de $2x$
le graphe de $2x + 1$
le graphe de $|2x + 1|$

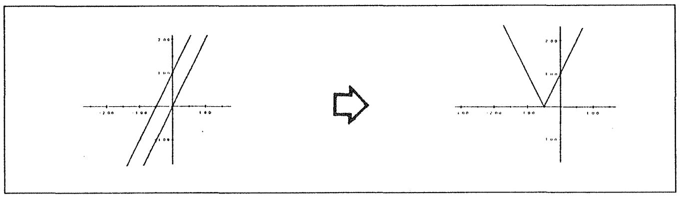


Fig. 10

Ayant développé certaines habiletés, nous sommes maintenant en mesure d'aborder une tâche un peu plus difficile, soit celle de construire un graphe approximatif d'une fonction définie comme étant le quotient de deux fonctions.

Débutons par un cas simple:

- Tracer le graphe de $f(x) = \frac{1}{x}$

On construit le graphe de $y = x$ (nous avons déshabillé le problème au maximum). Nous devons le reconstituer, cela signifie reconnaître la nature du problème, ce qui le caractérise.

Or $\frac{1}{x}$ est la fonction inverse de x.

CELA SIGNIFIE QUE:

- si x est grand	alors	$\frac{1}{x}$	est petit
- si x est petit	alors	$\frac{1}{x}$	est grand
- si x est croissant	alors	$\frac{1}{x}$	est décroissant
- si x est décroissant	alors	$\frac{1}{x}$	est croissant
- si x est positif	alors	$\frac{1}{x}$	est positif
- si x est négatif	alors	$\frac{1}{x}$	est négatif
- si $x = 0$	alors	$\frac{1}{x}$	n'existe pas

Donc l'important ici, à noter, est le fait qu'un zéro au dénominateur se traduit dans le graphe de la fonction par une asymptote verticale.

Le graphe de $f(x) = \frac{1}{x}$ est donc:

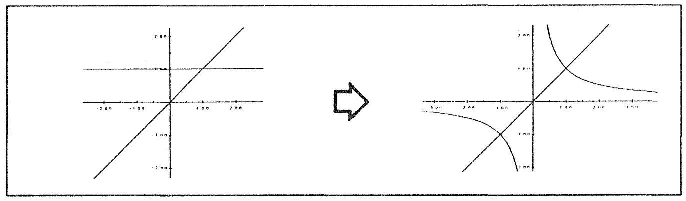


Fig. 11

Nous sommes en mesure de faire maintenant le graphe de la fonction:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

On construit le graphe de x^2
le graphe de $x^2 + 1$
le graphe de $\frac{1}{x^2 + 1}$

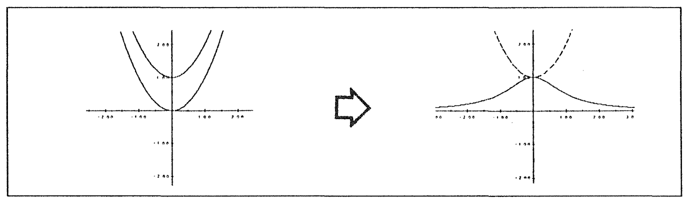


Fig. 12

Remarque,

- si $(a, f(a))$ est un min (max) et $f(a) \neq 0$ alors $(a\ ,\ \frac{1}{f(a)})$ est un max (min)

De même, on peut enchaîner en faisant construire le graphe de:

$$f(x) = \frac{1}{|x| + 1}$$

On construit le graphe de $|x|$
le graphe de $|x| + 1$
le graphe de $\frac{1}{|x| + 1}$

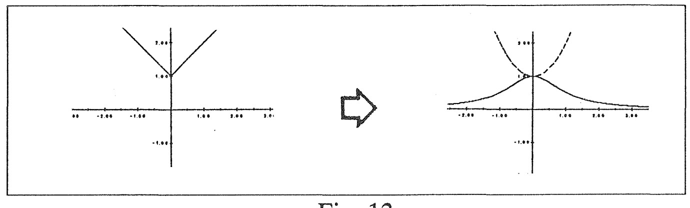


Fig. 13

Malgré le peu d'outils à sa disposition, l'étudiant est en mesure de percevoir la différence entre le graphe de:

$$\frac{1}{x^2+1} \quad \text{et celui de} \quad \frac{1}{|x|+1}$$

Nous pourrions poursuivre longuement ce genre d'exercices, tel n'est pas le but.

Cependant, à ce stade-ci, nous aimerions que l'étudiant soit rendu suffisamment habile pour avoir perdu le réflexe de décrocher devant ce genre de questions. Dans la pratique, on constate que beaucoup d'étudiants ont compris le sens du message et découvert un certain plaisir à résoudre de tels problèmes.

Pour compléter, il nous reste à analyser le cas où l'on doit tracer le graphe d'une fonction définie comme étant le quotient de deux fonctions dont le numérateur est différent de un. Le principe est le même que celui de la multiplication.

Cependant, tracer le graphe de $f(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)}$, demande quelques considérations à savoir:

- si $h(a) = 0$ et $g(a) \neq 0$	alors	$f(a) = 0$
- si $h(a) \neq 0$ et $g(a) = 0$	alors	$f(a)$ ∃
- si $g(a) = 1$	alors	$f(a) = h(a)$
- si $h(a) = 0$ et $g(a) = 0$	alors	prudence

Alors construire le graphe de: $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

Dans un premier temps, on construit sur un même système d'axe le graphe du numérateur et celui du dénominateur.

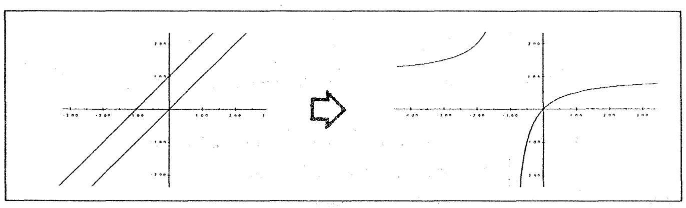


Fig. 14

lorsque x devient grand positivement ou négativement, alors: $\dfrac{x}{x+1} \cong \dfrac{x}{x} \cong 1$

la notion de limite sera approchée uniquement de cette façon.

Le cas de fonctions rationnelles qui nous semblent plus complexes, se traite de la même manière. Considérons le graphe de la fonction f définie par:

$$f(x) = \frac{1-2x}{x^2-x-6}$$

Observations

NUMÉRATEUR = 0	$\Rightarrow$	$f(1/2) = 0$
DÉNOMINATEUR = 0	$\Rightarrow$	$x = -2, x = 3$ A.V

Lorsque x devient grand positivement ou négativement,

alors $\dfrac{1-2x}{x^2-x-6} \cong \dfrac{-2x}{x^2-x} \cong \dfrac{-2}{x-1} \cong \dfrac{-2}{x} \cong 0$

i.e. $y = 0$ sera une asymptote horizontale

On construit le graphe de $1 - 2x$

le graphe de $x^2 - x - 6$;

ensuite, le graphe de $\dfrac{1-2x}{x^2-x-6}$

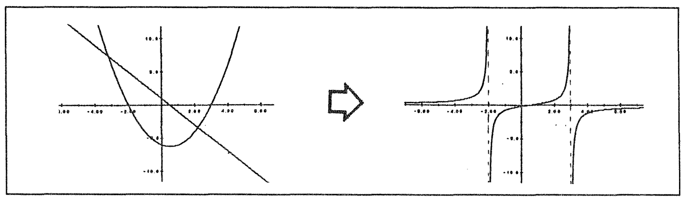


Fig. 15

Pour dernier exercice, proposons-nous de construire le graphe de la fonction f définie par: $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Observations:

NUMÉRATEUR = 0	$\Rightarrow$	$f(0) = 0$
DÉNOMINATEUR $\neq$ 0	$\Rightarrow$	pas A.V
DOMAINE DE f		$\Re$

Lorsque x devient grand positivement ou négativement,

alors $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cong \dfrac{x}{\sqrt{x^2}} \cong \dfrac{x}{|x|} \cong \pm 1$

i.e. deux asymptotes horizontales $y = \pm 1$

On doit ici dans un premier temps, construire le graphe du dénominateur et par la suite considérer le graphe du quotient.

On construit le graphe de $x^2 + 1$

le graphe de $\sqrt{x^2 + 1}$

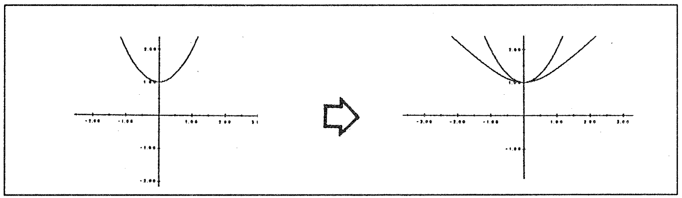


Fig. 16

Connaissant le graphe de $\sqrt{x^2 + 1}$ on peut maintenant construire le graphe de f.

On construit le graphe de x

le graphe de $\sqrt{x^2 + 1}$;

ensuite, le graphe de $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

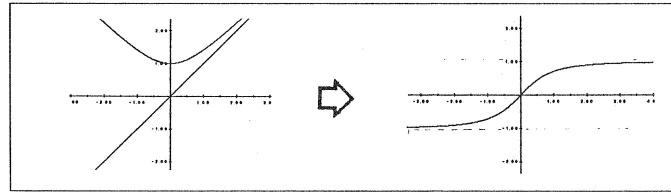


Fig. 17

Enfin, rappelons que les étudiants n'ont pas fait le cours de Calcul Différentiel et Intégral. Après un maximum de 7 heures de pratique, ils peuvent très bien naviguer à l'intérieur de tels types d'exercices et plus important encore, **y prendre un certain plaisir**. Tout au long du semestre, la notion du tracé de graphes sera présente et présentée sous différentes formes. À savoir, tracer le graphe des fonctions suivantes:

$f(x)$, $-f(x)$, $k - f(x)$, $1/f(x)$, $\sqrt{f(x)}$, $|f(x)|$ ...

Jean-Denis Groleau
Ghislain Neveu
Collège Jean-de-Brébeuf