CONCOURS DE L'ASSOCIATION MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC

NIVEAU COLLÉGIAL

Le vendredi 8 février 1991, de 9:00 à 12:00

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

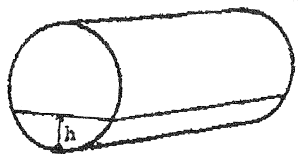
Ceci n'est pas un examen, mais bien un concours; il est donc tout naturel que vous trouviez certaines questions difficiles et que vous ne puissiez répondre qu'à quelques-unes. La correction, strictement confidentielle, prendra en compte divers éléments, dont la précision, la clarté, la rigueur et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée.

Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.
Note: L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.

QUESTION 1 ***(Le tonneau flottant à surveiller)***

Des pêcheurs ont découvert un gros tonneau cylindrique fermé flottant sur le fleuve Saint-Laurent, couché sur le côté (voir figure). Ce genre de tonneau métallique sert normalement à transporter des produits chimiques visqueux hautement toxiques. Il s'agit de décider s'il y a danger pour l'environnement ou si le tonneau est vide, en mesurant la profondeur h avec laquelle il pénètre dans l'eau. Une mesure donne h = 50 centimètres. Montrer, par calculs, qu'il y a danger pour l'environnement sachant que le tonneau vide (i.e. rempli d'air) pèse 2 000 kilogrammes, et qu'il a un rayon de 1 mètre et une longueur de 4 mètres.

[Rappels: Un centimètre cube d'eau pèse un gramme. *Le principe d'Archimède dit que tout corps plongé dans un liquide subit une poussée verticale ascendante égale au poids du liquide déplacé.* On a les approximations suivantes: $\pi = 3.1416$ *et* $\sqrt{3} = 1{,}732$



QUESTION 2 ***(L'hyperracine irrationnelle)***

Convenons de dire qu'un nombre réel t est une ***hyperracine*** d'un nombre c si $t^t = c$. Par exemple, 4 est une hyperracine de 256 puisque $4^4 = 256$. Démontrer que l'hyperracine $t > 1$ du nombre 2 est nécessairement un nombre irrationnel (c'est-à-dire: n'est pas de la forme $t = m/n$ où m, n sont des entiers).

QUESTION 3 ***(Un polynôme à découvrir)***

Trouver un polynôme $P(x)$ de degré 3 tel que $P(x) + 100$ est divisible par $(x - 1)^2$ et $P(x) + 1000$ est divisible par $(x + 1)^2$.

QUESTION 4 ***(Les chiffres mystérieux)***

Remplacer les lettres A, B, C, D, E par des chiffres ***distincts*** compris entre 1 et 9 (inclusivement) de sorte que la multiplication suivante soit valable dans le système usuel de numération décimale.

$$\begin{array}{r} \text{ABC} \\ \times\ \text{BAC} \\ \hline \text{DEODE} \end{array}$$

Note: Le chiffre du milieu dans le résultat de la multiplication est un *zéro*.

QUESTION 5 ***(Les valeurs absolues)***

Soient $a < b < c < d$ des nombres réels. Pour quelle valeur de k l'équation

$|x - a| + |x - b| + |x - c| + |x - d| = k$

possède-t-elle une infinité de solutions ?

Note: L'inconnue est x, la notation $|u|$ désigne la *valeur absolue* du nombre u. La valeur de k cherchée doit être exprimée en fonction de a, b, c, d.

QUESTION 6 ***(Le premier as)***

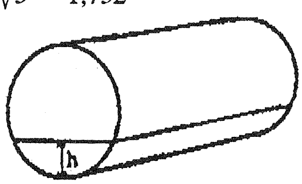
On tire (sans remise) des cartes d'un jeu de cartes ordinaire (52 cartes) jusqu'à ce qu'un as soit tiré. Quel *est*, en moyenne, le rang du tirage de ce premier as ?

1991
CONCOURS DE L'ASSOCIATION MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC
NIVEAU COLLÉGIAL
SOLUTIONNAIRE

QUESTION 1 *(Le tonneau flottant à surveiller)*

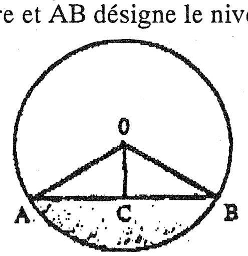
Des pêcheurs ont découvert un gros tonneau cylindrique fermé flottant sur le fleuve Saint-Laurent, couché sur le côté (voir figure). Ce genre de tonneau métallique sert normalement à transporter des produits chimiques visqueux hautement toxiques. Il s'agit de décider s'il y a danger pour l'environnement ou si le tonneau est vide, en mesurant la profondeur h avec laquelle il pénètre dans l'eau. Une mesure donne h = 50 centimètres. Montrer, par calculs, qu'il y a danger pour l'environnement sachant que le tonneau vide (i.e. rempli d'air) pèse 2000 kilogrammes, a un rayon de 1 mètre et une longueur de 4 mètres.

[Rappels: Un centimètre cube d'eau pèse un gramme. Le *principe d'Archimède* dit que *tout corps plongé dans un liquide subit une poussée verticale ascendante égale au poids du liquide déplacé*. On a les approximations suivantes: = π = 3.1416 *et* $\sqrt{3}$ = 1,732



SOLUTION PROPOSÉE

Prenons le mètre comme unité de longueur et le kilogramme comme unité de poids. La figure décrit la base du tonneau dont O est le centre et AB désigne le niveau de l'eau.



Abaissons la perpendiculaire OC. On a $\overline{OB}$ = 1 , $\overline{OC}$ = 1/2. Ainsi, cos($\angle$ *COB*) = 1/2 et on trouve que $\angle$ COB = $\pi/3$. De plus, le théorème de Pythagore donne immédiatement $\overline{AB} = 2\ \overline{CB} = \sqrt{3}$.

Mais l'aire hachurée (i.e. la partie de la base sous l'eau) est donnée par

aire hachurée = aire du secteur AOB = aire du triangle

$$\text{AOB} = \frac{\pi \cdot \overline{OB}^2}{3} - \frac{\overline{AB}\cdot\overline{OC}}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Donc le volume d'eau déplacée (en mètres cubes) est donné par

aire hachurée - hauteur du tonneau = $(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}) \cdot 4$

= 2.4568 m^3

Mais, un mètre cube d'eau pèse 1000 kg. On en déduit que le poids de l'eau déplacée est 2456.8 kg > 2000 kg. Ainsi, le tonneau n'est pas vide !

QUESTION 2 *(L'hyperracine irrationnelle)*

Convenons de dire qu'un nombre réel t est une ***hyperracine*** d'un nombre c si $t^t = c$. Par exemple, 4 est une hyperracine de 256 puisque $4^4 = 256$. Démontrer que l'hyperracine $t > 1$ du nombre 2 est nécessairement un nombre irrationnel (c'est-à-dire: n'est pas de la forme $t = m/n$ où m, n sont des entiers).

SOLUTION PROPOSÉE

Procédons par l'absurde en faisant l'hypothèse que le nombre rationnel $t = m/n$ est une hyperracine de 2. On peut toujours supposer que la fraction m/n est simplifiée (c'est-à-dire que les entiers m et n n'ont pas de facteurs communs). On a les implications suivantes:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{m/n} = 2 \Rightarrow \left(\frac{m}{n}\right)^m = 2^n \Rightarrow m^m = 2^n n^m.$$

Ainsi, m est pair et on peut écrire $m = 2k$. On déduit de ceci que

$m^m = (2k)^m = 2^m k^m = 2^n n^m$.

Ainsi, $2^{m-n}k^m = n^m$. Mais, $m > n$. D'où l'on tire que n est aussi un nombre pair. Ceci contredit l'hypothèse que la fraction m/n est simplifiée.

QUESTION 3 *(Un polynôme à découvrir)*

Trouver un polynôme $P(x)$ de degré 3 tel que $P(x) + 100$ est divisible par $(x - 1)^2$ et $P(x)$ + 1 000 est divisible par $(x + 1)^2$.

SOLUTION PROPOSÉE

Le polynôme $P'(x)$ de degré 2 est divisible par $(x - 1)$ et aussi par $(x + 1)$. Par conséquent,

$P'(x) = A(x^2 - 1), A \neq 0$

D'où l'on tire

$$P(x) = A\left(\frac{x^3}{3} - x\right) + C.$$

Puisque $P(1) + 100 = 0$ et que $P(-1) + 1000 = 0$, on obtient un système linéaire à deux inconnues A et C. La solution de ce système donne A = -675 et B = -550. Le polynôme cherché est donc

$$P(x) = A\left(\frac{x^3}{3} - x\right) + C = (-675)\left(\frac{x^3}{3} - x\right) + (-550) = -225\,x^3$$

$+ 675\,x - 550$.

Vérification:

$P(x) + 100 = -225\,x^3 + 675\,x - 450 = (x - 1)^2\,(-225\,x - 450)$,

$P(x) + 1000 = -225\,x^3 + 675\,x + 450 = (x + 1)^2\,(-225\,x + 450)$,

Note: Ce problème peut aussi être résolu sans faire appel au calcul différentiel.

QUESTION 4 *(Les chiffres mystérieux)*

Remplacer les lettres A, B, C, D, E par des chiffres distincts compris entre 1 et 9 (inclusivement) de sorte que la multiplication suivante soit valable dans le système usuel de numération décimale.

$$\begin{array}{r} \text{ABC} \\ \text{X BAC} \\ \hline \text{DEODE} \end{array}$$

Note: Le chiffre du milieu dans le résultat de la multiplication est un *zéro*.

SOLUTION PROPOSÉE

Il existe plusieurs approches pour résoudre ce problème. Sans perte de généralité, on peut toujours supposer que ABC < BAC (quitte à interchanger A et B). Remarquons qu'on a alors

ABC $\leq$ 312. (1)

En effet, puisque DEODE 98098, on en déduit que ABC < $(98098)^{1/2}$ < 314. L'inégalité proposée découle alors du fait que les chiffres de ABC sont distincts. Notons que ABC x BAC = DEODE = 1001 x DE = 7 x 11 x 13 x DE.

Ainsi ABC est divisible par 7, 11 ou 13. (2)

Finalement, puisque (C = 1 ou C = 5 ou C = 6) $\Rightarrow$ C = E, on en tire que

C = 2, 3, 4, 7, 8 ou 9. (3)

Les nombres ABC satisfaisant les conditions (1), (2) et (3) sont:

132, **143**, 147, 154, 168, 169, 182, 187, 189, 198, 217, 234, 238, 247, 253, 259, 264, 273, 287, 294, 297, 312.

Le *deuxième* de ces nombres, 143, satisfait les conditions requises puisque

143 x 413 = 59059.

Ainsi, **A = 1, B = 4, C= 3, D = 5, E = 9** est une solution au problème proposé.

Interchangeant A et B, on a une autre solution

A = 4, B = 1, C = 3, D = 5, E =9.

Note. Il n'est pas nécessaire d'analyser toute la liste des nombres ABC satisfaisant les conditions (1), (2) et (3) puisque le deuxième terme de cette liste, 143, fournit déjà une solution. Cependant, une analyse exhaustive montre que les 2 solutions citées sont les seules possibles.

QUESTION 5 *(Les valeurs absolues)*

Soient $a < b < c < d$ des nombres réels. Pour quelle valeur de k l'équation

$|x - a| + |x - b| + |x - c| + |x - d| = k$

possède-t-elle une infinité de solutions ?

Note: L'inconnue est x, la notation $|u|$ désigne la *valeur absolue* du nombre u. La valeur de k cherchée doit être exprimée en fonction de a, b, c, d.

SOLUTION PROPOSÉE

Étudions le graphe de la fonction $f(x) = |x - a| + |x - b| + |x - c| + |x - d|$. On a cinq cas:

Cas 1 $-\infty < x < a$: On a alors $f(x) = (a - x) + (b - x) + (c - x) + (d - x) = (a + b + c + d) - 4x$.

Ceci donne lieu à une portion de droite de pente -4 (voir figure).

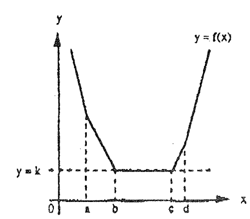
Cas 2 $a \leq x < b$: On a alors $f(x) = (x - a) + (b - x) + (c - x) + (d - x) = (-a + b + c + d) - 2x$.
Ceci donne lieu à une portion de droite de pente -2 (voir figure).

Cas 3 $b \leq x < c$: On a alors $f(x) = (x - a) + (x - b) + (c - x) + (d - x) = (-a - b + c + d)$
Ceci donne lieu à une portion de droite de pente 0, i.e.: un palier horizontal (voir figure).

Cas 4 $c \leq x < d$: On a alors $f(x) = (x - a) + (x - b) + (x - c) + (d - x) = (-a - b - c + d) + 2x$.
Ceci donne lieu à une portion de droite de pente 2 (voir figure).

Cas 5 $d \leq x < \infty$: On a alors $f(x) = (x - a) + (x - b) + (x - c) + (x - d) = (-a - b - c - d) + 4x$.
Ceci donne lieu à une portion de droite de pente 4 (voir figure).

L'équation $y = k$ correspond à une droite horizontale de "hauteur" k. L'équation proposée possède donc une infinité de solutions si et seulement si la droite $y = k$ contient le palier horizontal du graphe de la fonction $f(x)$. A cause du cas 3, la hauteur de ce palier est $(-a-b+c+d)$. D'où $k = (-a-b+c+d)$.



QUESTION 6 ***(Le premier as)***

On tire (sans remise) des cartes d'un jeu de cartes ordinaire (52 cartes) jusqu'à ce qu'un as soit tiré. Quel *est*, en moyenne, le rang du tirage de ce premier as ?

SOLUTION PROPOSÉE

Plus généralement, supposons qu'il y a k as dans un jeu de n cartes. Soit X le rang du premier as tiré. On cherche $f(k,n)$ = la valeur moyenne de X.

On tire une première carte.

- Si cette carte est un as, on a $X = 1$ et l'épreuve est terminée.
- Si cette carte n'est pas un as, ce qui a une probabilité de $(n-k)/n$ de se produire, on se retrouve dans la situation initiale avec k as parmi n-1 cartes.

On a donc $$f(k, n) = 1 + \frac{n-k}{n} f(k, n-1).$$

Évidemment, $f(k,k) = 1$ et on trouve successivement

$$f(k, k+1) = 1 + \frac{1}{k+1} \cdot 1 = \frac{k+2}{k+1},$$

$$f(k, k+2) = 1 + \frac{2}{k+2} \cdot \frac{k+2}{k+1} = \frac{k+3}{k+1},$$

$$f(k, k+3) = 1 + \frac{3}{k+3} \cdot \frac{k+3}{k+1} = \frac{k+4}{k+1},$$

$$f(k, n) = \frac{n+1}{k+1}$$

Dans le problème particulier du jeu de cartes, on a $k = 4$ et $n = 52$. On trouve donc

valeur moyenne de $X = f(4, 52) = \dfrac{52+1}{4+1} = \dfrac{53}{5} = 10.6$

CONCOURS MATHÉMATIQUES DE L'A.M.Q.

(NIVEAU COLLÉGIAL)

ÉDITION 1991
GAGNANTES ET GAGNANTS

1er	Charles Patrick Dugas Collège de Mérici
2e	Kai-Chung Cheung (Champlain Regional College, St-Lambert)
3e	Ludovic Nicolle Cegep de Sainte-Foy
4e	Eric Joanis Collège de l'Outaouais
5e	Andrew Frederiksen Collège Jean-de-Brebeuf
6e	Nicolas Bélanger Cegep de Sainte-Foy
7e	Jason Pierre Sweeney Collège de Mérici
8e	Nyd Garavito-Bruhn Collège Marianopolis

Mentions honorables
(dans l'ordre alphabétique)

Sébastien Gilbert	Cegep de Sainte-Foy
Jonathan Greenberg	Collège Marianopolis
Nathalie Langlois	Collège de Mérici
Yoon Sin Lee	Champlain Regional College (St-Lambert)
Rami Mehio	Collège Marie-de-France
Lorenzo Moretti	Collège Marie-de-France
Pierre-J. Sanon	Cegep Bois-de-Boulogne
Pushpinder Singh	Champlain Regional College (St-Lambert)
Gregory Stark	Collège Marianopolis
Ion Gruia Trifu	Collège Stanislas
Seyil Yoon	Collège Marianopolis