

Concours mathématique du Québec 1991

le 7 février 1991

14:00 - 17:00

Le concours mathématique du Québec n'est pas un examen. Il vise à déceler les meilleurs talents en mathématiques parmi la population étudiante. Pour que ces grands talents puissent se détacher nettement de la masse des autres, le questionnaire est abondant et varié: plusieurs genres de questions et divers degrés de difficulté. Qu'un étudiant ne se décourage donc pas s'il n'arrive pas à répondre à plus de deux ou trois questions. Les auteurs du questionnaire s'attendent à ce que les bons étudiants fournissent quatre ou cinq bonnes réponses. Si vous en trouvez six, vous êtes excellent en mathématiques. Seuls quelques génies en donneront sept. Bonne chance !

1. Le code secret

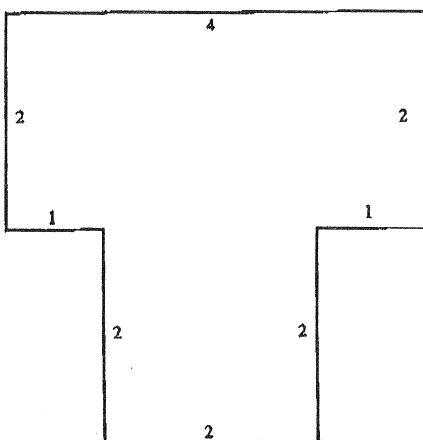
Le code secret d'un coffre-fort est un carré parfait à cinq chiffres. Le chiffre des milliers, celui des dizaines, celui des unités et celui des centaines, dans cet ordre, sont consécutifs. La somme des chiffres est 27. Quel est ce code ?

2. Les trois examens

Dans une classe de cent élèves, on vient de recevoir les résultats d'examens en chimie, physique et mathématiques. En chimie, vingt ont échoué, en physique vingt-six et en mathématiques vingt-trois. Dix ont réussi dans exactement une des trois matières et aucun n'a échoué dans toutes les trois. Combien d'élèves peuvent se vanter d'avoir réussi dans les trois matières.

3. Le puzzle en T

Un morceau de carton en forme de T a les dimensions indiquées dans la figure ci-dessous, où chaque nombre indique la longueur du côté correspondant. Montrer comment on peut découper ce T pour en tirer un puzzle à quatre morceaux identiques.



4. Le losange dans un cercle

Un losange a trois de ses sommets sur un cercle C dont le centre est le quatrième sommet du losange. Trouver l'aire de ce losange, sachant que l'aire d'un carré inscrit dans le cercle C est de 200 cm^2 .

5. Les maisons numérotées

Dans un développement domiciliaire, on avait numéroté dix-sept maisons en ordre croissant en leur assignant dix-sept nombres consécutifs. Quand une de ces maisons fut démolie, on a remarqué que la moyenne des nombres assignés se trouvait réduite de 0,25. Trouver le rang de la maison démolie.

6. Les sets de tennis interminables

Alain, Bernard, Charles et Daniel ont joué hier trois sets de tennis, à deux contre deux. D'un set à l'autre ils ont changé de partenaire, de sorte qu'aucun n'a joué deux sets avec le même partenaire.

Ils suivent la règle classique, qu'une équipe gagne un set si elle est la première à atteindre six parties gagnées, mais à la condition que l'écart entre les deux équipes soit d'au moins deux parties; autrement ils continuent à jouer jusqu'à ce qu'une équipe ait deux parties d'avance sur l'autre. Il arrive que certains sets durent très longtemps !

Hier leur set le plus court fut le premier, où l'équipe d'Alain a battu celle de Bernard 9 à 7. Dans le deuxième set, l'équipe de Charles a battu celle de Daniel 11 à 9. Dans les trois sets, Charles a totalisé 26 parties gagnées. Combien Alain en a-t-il gagnées en tout ? Expliquez comment vous êtes arrivé à votre réponse.

7. Des X partout

Il y a x années, Alberte avait l'âge que Béatrice aura dans x années et x fois l'âge que Charlotte avait il y a x années. La somme de l'âge qu'avait Charlotte il y a x années et de son âge présent est égale à l'âge qu'elle aura dans x années. Dans x années, le rapport des âges d'Alberte et de Charlotte sera égal au rapport des âges d'Alberte et de Béatrice il y a x années. Trouver les âges présents d'Alberte, Béatrice et Charlotte.

Concours mathématique du Québec 1991 Solutionnaire

1. Le code secret

Supposons que le code est

$$10\,000 a_4 + 1\,000 a_3 + 100 a_2 + 10 a_1 + a_0.$$

Alors il existe un chiffre b tel que

$$a_3 = b, a_1 = b + 1, a_0 = b + 2 \text{ et } a_2 = b + 3.$$

On a donc

$$a_4 + 4b + (0 + 1 + 2 + 3) = a_4 + 4b + 6 = 27,$$

où

$$a_4 = 21 - 4b.$$

Comme $0 \leq a_4 \leq 9$, on a $b = 3$ et $a_4 = 9$, $b = 4$ et $a_4 = 5$ ou $b = 5$ et $a_4 = 1$. Les nombres correspondants sont 93 645, 54 756 et 15 867. Comme $54\,756 = 234^2$ et 93 645 et 15 867 ne sont pas des carrés parfaits, le code est 5 4 7 5 6.

2. Les trois examens

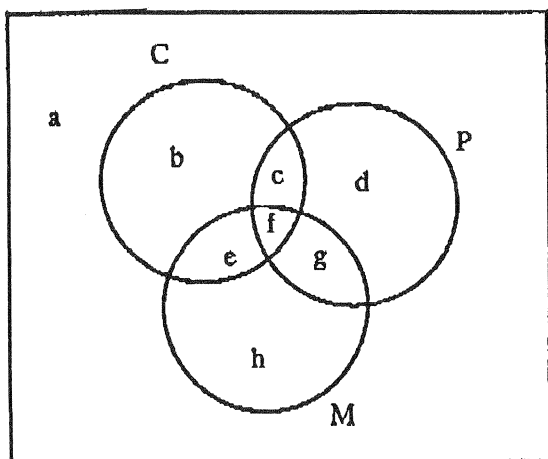
Dans un diagramme de Venn, représentons par trois cercles les trois ensembles

C, de ceux qui ont échoué en chimie,

P, de ceux qui ont échoué en physique,

M, de ceux qui ont échoué en mathématiques.

Soient a, b, c, d, e, f, g et h les intersections et compléments de ces ensembles, tel qu'indiqué dans la figure. Nous voulons évaluer a . Les données du problème se résument dans les équations suivantes:

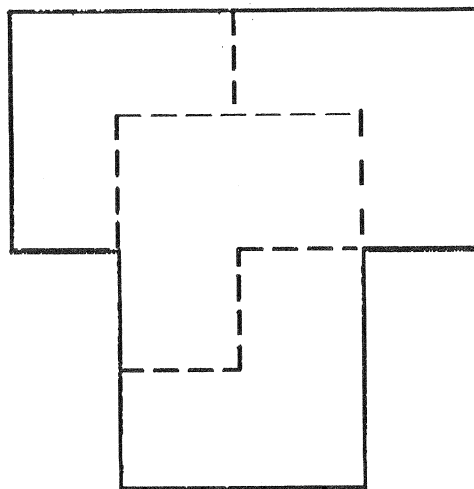


- (1) $a + b + c + d + e + f + g + h = 100$
- (2) $b + c + e + f = 20$
- (3) $c + d + f + g = 26$
- (4) $e + f + g + h = 23$
- (5) $c + e + g = 10$
- (6) $f = 0.$

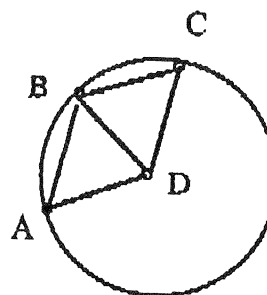
L'équation (6) permet d'enlever f des cinq premières. Si de l'équation (1) on soustrait les équations (2), (3) et (4), puis on ajoute l'équation (5) au résultat, on obtient

$$a = 100 - 20 - 26 - 23 + 10 = 41.$$

3. Le puzzle en T



4. Le losange dans un cercle



Un carré dont l'aire est de 200 cm^2 a un côté de $\sqrt{200} \text{ cm}$ et une diagonale de $\sqrt{200+200}=20 \text{ cm}$. Si ce carré est inscrit dans un cercle, alors ce cercle a un rayon de 10 cm .

Dans le losange ABCD, on a

$$AD = DC = AB = BC = BD = 10 \text{ cm}.$$

Les triangles ABD et BCD sont donc équilatéraux de côté 10 et d'aire

$$\frac{50\sqrt{3}}{2}.$$

L'aire du losange est donc de $50\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

5. Les maisons numérotées

Soit r le nombre assigné à la maison démolie. Soit S la somme des nombres assignés aux dix-sept maisons. Alors

$$\frac{S}{17} = \frac{S - r}{16} + \frac{1}{4},$$

ou

$$r = \frac{S}{17} + 4.$$

Comme $\frac{S}{17}$ est le nombre assigné à la 9e maison, c'est la 13e qui fut démolie.

	A	B	C	D
1	9	7	7	9
2	11	9	11	9
3	10	10	8	8
Total	30	26	26	26

6. Les sets de tennis interminables

Les données du problème sont représentées dans le tableau 1.

	A	B	C	D
1	9	7		
2			11	9
3				
Total			26	

Tableau 1

Si C avait gagné 9 parties dans le premier set, alors il en aurait gagné 6 dans le troisième, et le troisième set aurait été plus court que le premier, contrairement à la donnée du problème. Donc C a gagné 7 parties dans le premier set et 8 dans le troisième. On peut donc compléter la troisième colonne du tableau, ainsi que la première ligne. Ayant joué contre C dans les sets 1 et 2, D a joué avec C dans le troisième, et gagné 8 parties. Dans ce troisième set, A et B ont joué ensemble et gagné 10 parties (ils ne peuvent en avoir gagné seulement 6, car alors le set 3 aurait été plus court que le set 1). Ayant joué contre C dans les sets 1 et 3, A a joué avec C dans le deuxième. On peut donc compléter le tableau. Alain a gagné 30 parties en tout.

7. Des X partout

Soient a , b et c les âges présents d'Alberte, de Béatrice et de Charlotte respectivement. Les données du problème se résument en quatre équations.

$$(1) \quad a - x = b + x$$

$$(2) \quad a - x = x(c - x)$$

$$(3) \quad 2c - x = c + x$$

$$(4) \quad \frac{a + x}{c + x} = \frac{a - x}{b - x}$$

De (3) on peut tirer

$$(5) \quad c = 2x.$$

On remplace c par $2x$ dans (2) pour obtenir

$$(6) \quad a = x^2 + x.$$

De (1) on peut alors tirer

$$(7) \quad b = x^2 - x.$$

On remplace a , b et c dans (4) par les valeurs données en (5), (6) et (7) et on obtient

$$\frac{x^2 + 2x}{3x} = \frac{x^2}{x^2 - 2x},$$

d'où

$$(8) \quad x^2(x^2 - 3x - 4) = 0.$$

Les racines de (8) sont 0, 0, -1 et 4. Pour $x = 4$, on obtient les âges $a = 20$, $b = 12$ et $c = 8$.

Concours mathématique du Québec

Les gagnants

1991

1er DUBUC, Christian	Polyvalente J.H. Leclerc, Granby
2e DÉCHÈNE, Isabelle MARCOUX, Louis-Étienne	École Sec. Mont Saint-Sacrement, St-Gabriel-de-Valcartier Petit Séminaire de Québec, Québec
4e AMYOT, Martin BLAIS-MORIN, Louis-Antoine	École Sec. Mont Saint-Sacrement, St-Gabriel-de-Valcartier École Polyvalente C.E. Pouliot, Gaspé
6e SAURIOL, Pierre POIRIER, Benoît FORTIER, Susie BOUDREAULT, François GAGNON, Alexis	École Secondaire des Sources, Dollard-des-Ormeaux École Secondaire des Sources, Dollard-des-Ormeaux Collège Mont Notre-Dame, Sherbrooke Collège Mont-Saint-Louis, Montréal Séminaire de Chicoutimi, Chicoutimi
11e DROLET, Louis RACICOT-DAIGNAULT, François GAGNON, Nicolas BIRTZ, Brad LAPIERRE, Patrick ST-AMANT, Yves	Séminaire des Pères Maristes, Sillery Collège Jean-Eudes, Montréal Séminaire de Chicoutimi, Chicoutimi École Secondaire des Sources, Dollard-des-Ormeaux Cité Étudiante, Roberval École Secondaire Paul Le Jeune, St-Tite
17e LONGTIN, Jean PAGÉ, Louis-Luc ABGRALL, Francine JÉRÔME, Sylvain	Collège de Montréal, Montréal Séminaire de la Très-Sainte-Trinité, St-Bruno École Polyvalente Paul-Hubert, Rimouski Collège Saint-Jean-Vianney, Montréal
21e BILODEAU, Marc JULIEN, Steve GALARNEAU, Benoît LIN, Xu LEFRANÇOIS, Pascale ROY, Mathieu MATINOPOULOS, Harry	Polyvalente de Normandin, Normandin Petit Séminaire de Québec, Québec Polyvalente La Camaradière, Duberger École Secondaire Jeanne-Mance, Montréal Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal Collège Clarétain, Victoriaville Collège Beaubois, Montréal
28e ROUSSEAU, Jean-Pierre ST-LAURENT, David MALTAIS, Frédéric LAPLANTE, Pascal BOURDAGES, Alain-Daniel NGUYEN, Caroline SCOTT, Christopher CROTEAU, Michael PELLETIER, Fabrice FORTIN, Samuel	École Secondaire Beaulieu, St-Jean-sur-Richelieu École Secondaire de Bromptonville, Bromptonville Polyvalente La Camaradière, Duberger Polyvalente J.H. Leclerc, Granby École Polyvalente C.E. Pouliot, Gaspé Pensionnat du Saint-Nom-de-Marie, Outremont École Secondaire des Sources, Dollard-des-Ormeaux École Secondaire des Sources, Dollard-des-Ormeaux École Sec. Mont Saint-Sacrement, St-Gabriel-de-Valcartier École Polyvalente Paul-Hubert, Rimouski
38e LEMIEUX, Sébastien	École Secondaire St-Paul de Varennes, Varennes
39e CAILLÉ, Alain-Sébastien LORD, Martin BORGIA, Guillaume CHARBONNEAU, Sophie CAMISA, Xavier HAREL, Mathieu BISHAY, Fadi BÉLANGER, Alexis FRANCOEUR, Sébastien	Séminaire de Sherbrooke, Sherbrooke Polyvalente Le Carrefour, Val D'Or Polyvalente de Loretteville, Loretteville École Secondaire des Sources, Dollard-des-Ormeaux École Secondaire des Sources, Dollard-des-Ormeaux École Secondaire Bernard-Gariépy, Tracy Collège Mont-Saint-Louis, Montréal Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal École Secondaire des Sources, Dollard-des-Ormeaux

ORIOU, G.-Frédéric
PELLAND, Sophie

50e

NGUYEN, Quang Dung
PUCELLA, Elisa
PAQUETTE, Marc-André
MATTAR, Brigide
DE VLEESCHAUWER, Marc
CORNUT, Alain
DESBIENS, Geneviève
COTTINET, Alexandre
BISAILLON, Pierre-Luc

59e

PARADIS, Jean-François
LABELLE, François
LAMONDE, Jean-François
EUSEBI, Ricardo
DUBIEN, Marc-André
MARTEL, Annie
CHIANG, Ming Chie
HERVIEUX, Lyne
MONTPETIT, Alexandre

68e

LANDRY, Éric
RENAUD, Alain
FODOR, Mark
SAE KOO, Lee
KHUONG, Sophal
BARABÉ, Frédéric
BÉDARD, Jean-Pierre
DESCARREAU, Martin
ST-AMAND GLASSON, Nadine
YSLBOT-LAGLOIRE, Émily
MIZERA, Stefan
SIMARD, Mathieu

80e

DUPUIS, Étienne
CHOUNARD, Serge
ZIKOS, Eugénia
NGUYEN, Hai-Nam
POIRIER, Julie
BOIVIN, Charles
MONETTE, Julie
MARQUIS, Vincent

88e

VACHON, Pierre
DANIS, Élisabeth
CAMPEAU, Jean-Marc
SAVARD, Stéphane
LAFORTUNE, Yves
BEDEVIAN, Annie
DRAINVILLE, Alain
GAGNÉ, Philippe
GEMME, Pascal
TREMBLAY, François
LEVESQUE, Thierry
DENIS, Sébastien
DION, Isabelle
COUTURE, Yohann
LAMOUREUX, Pascal
LANDRY, Pascal

Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
Collège Durocher, St-Lambert

Collège de Montréal, Montréal
Lycée du Saguenay, Chicoutimi
Collège Charles-Lemoyne, Ste-Catherine
Villa Ste-Marcelline, Westmount
École Secondaire des Sources, Dollard-des-Ormeaux
École Secondaire des Sources, Dollard-des-Ormeaux
École Polyvalente Dominique Racine, Chicoutimi
Collège Ste-Anne-De-La-Pocatière, La Pocatière
Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal

Séminaire de la Très-Sainte-Trinité, St-Bruno
École Joseph-François-Perreault, Montréal
Petit Séminaire de Québec, Québec
Collège Saint-Jean-Vianney, Montréal
École Secondaire Antoine-Brossard, Brossard
Polyvalente de Neufchatel, Neufchatel
École Secondaire Jean XXIII, Dorval
École Secondaire Jean-Baptiste-Meilleur, Repentigny
Collège Mont-Saint-Louis, Montréal

Séminaire de la Très-Sainte-Trinité, St-Bruno
Cité Étudiante, Roberval
Collège Marie-de-France, Montréal
École Royal George, Greenfield Park
Petit Séminaire de Québec, Québec
Petit Séminaire de Québec, Québec
École Secondaire Louis-Riel, Montréal
École Sec. Mont Saint-Sacrement, St-Gabriel-de-Valcartier
École des Ursulines de Québec, Québec
Collège Saint-Charles-Garnier, Québec
Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal

Collège Apostolique Saint-Alexandre, Gatineau
Séminaire de Chicoutimi, Chicoutimi
Collège Français, Montréal
École Secondaire Jeanne-Mance, Montréal
École Sec. Mont Saint-Sacrement, St-Gabriel-de-Valcartier
Séminaire de la Très-Sainte-Trinité, St-Bruno
Collège Charles-Lemoyne, Ste-Catherine
Collège Charles-Lemoyne, Ste-Catherine

Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
École Secondaire St-Paul de Varenne, Varenne
Séminaire de la Très-Sainte-Trinité, St-Bruno
Séminaire de la Très-Sainte-Trinité, St-Bruno
Collège Apostolique St-Alexandre, Gatineau
Villa Ste-Marcelline, Westmount
École Secondaire de Bromptonville, Bromptonville
École Secondaire Antoine-Brossard, Brossard
École Secondaire du Verbe Divin, Granby
Séminaire de Sherbrooke, Sherbrooke
Polyvalente La Camaradière, Duberger
École Polyvalente Jean-Jacques Bertrand, Farnham
École Secondaire St-Joseph, St-Hyacinthe
École Secondaire Bernard-Gariépy, Tracy
Polyvalente J.H. Leclerc, Granby
Collège Bourget, Rigaud