Chronique

Jeux et problèmes

Jean-Marie Labrie
Université de Sherbrooke

Par cette chronique, nous avons toujours voulu rejoindre les amateurs de problèmes qui oeuvrent dans tous les ordres d'enseignement. Nous pensons avoir réussi car nous recevons régulièrement, depuis 1982, des lettres qui nous encouragent à poursuivre cette chronique qui intéresse autant les élèves que les enseignants et enseignantes de la mathématique eux-mêmes.

L'une des dernières lettres reçues est signée Charles-E. Jean, fidèle lecteur du Bulletin AMQ et surtout auteur de volumes sur la résolution de problèmes et de jeux logiques. Il nous envoie quelques problèmes intéressants que vous trouverez un peu plus loin et ajoute des commentaires sur la solution suggérée de problèmes déjà publiés dans les numéros précédents. Nous sommes heureux de le saluer et de le remercier de sa participation appréciée.

Problème 85 (Ordre primaire)

Si 4 jours avant demain est un mercredi, quels sont les trois jours après hier ?

Solution suggérée:

ME J V S D L MA

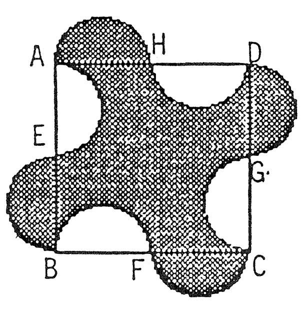
Hier Auj. Dem.

Les trois jours après hier sont: samedi, dimanche et lundi.

Problème 86 (Premier cycle du secondaire ou fin du primaire)

La mesure du côté du carré ABCD est égale à 2cm. E, F, G et H sont les points milieux respectifs des 4 côtés AB, BC, CD et DA. Les courbes en dehors du carré sont des demi-cercles et les courbes des parties non ombragées sont également des demi-cercles.

Trouver l'aire de la partie ombragée.



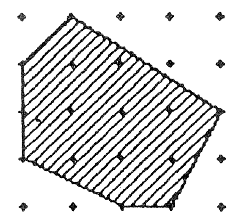
Solution suggérée:

L'aire des 4 demi-cercles à l'extérieur du carré est équivalente à l'aire des 4 demi-cercles à l'intérieur du carré.

Donc, l'aire de la partie ombragée est équivalente à l'aire du carré. L'aire de la partie ombragée est égale à 4 cm^2.

Problème 87 (1er cycle du secondaire)

Quelle est l'aire de la partie ombragée représentée sur le géo-plan ci-dessous ?



On propose trois solutions.

1re solution suggérée:

Le théorème de Pick dit comment trouver l'aire d'un polygone déterminé sur un géo-plan ou dans un plan pointé.

L'unité d'aire ici est un petit carré.

On peut suivre les étapes suivantes:

1) Compter le nombre de points «p» à l'intérieur du polygone.
2) Compter le nombre de points «q» sur les côtés du polygone.
3) L'aire A est donnée par la formule:

$$A = \frac{q}{2} + (p - 1)$$

On applique la formule à la figure ci-dessous:

1) $q = 7$ et $p = 8$
2) $$A = \frac{7}{2} + (8 - 1) = 3{,}5 + 7 = 10{,}5$$

2e solution suggérée (par soustraction)

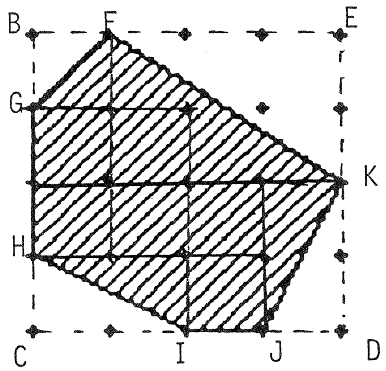
a. Aire du grand carré BCDE: 4 x 4 = 16

b. Aire des 4 triangles non ombragés:

1) Aire du triangle BGF: 0,5
2) Aire du triangle HCI: 1,0
3) Aire du triangle JDK: 1,0
4) Aire du triangle FKE: 3,0

c. Total des aires des 4 triangles: 5,5

d. Aire de la partie ombragée: 16 - 5,5 = 10,5



3e solution suggérée (par addition)

Il suffit de partager la partie ombragée en petits carrés et en triangles bien déterminés.

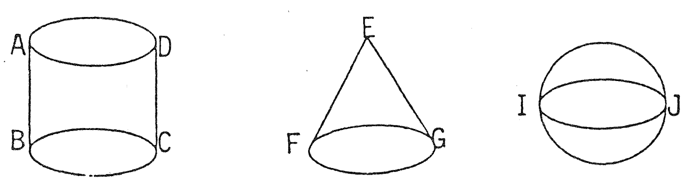
5 petits carrés: 5 unités
un grand triangle: 3 unités
2 triangles moyens: 2 unités
1 petit triangle: 0,5 unité

Total: 5 + 3 + 2 + 0,5 = 10,5

Problème 88 (Primaire ou secondaire)

Dans l'espace à 3 dimensions, la formule d'Euler $F + S - A = 2$ est-elle vraie pour le cylindre, le cône et la sphère ? Si oui, comment le montrer dans chaque cas ?

F : nombre de faces
S: nombre de sommets
A: nombre d'arêtes



Solution suggérée:

a. Cylindre:

4 faces: 2 bases, 2 demi-cylindres
4 sommets: A, B, C et D
6 arêtes: $\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{DA}$, $\overline{AB}$, $\overline{DC}$, $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{CB}$

$F + S - A = 4 + 4 - 6$

$= 2$

b. Cône:

3 faces: 1 base et deux demi-cônes
3 sommets: E, F et G
4 arêtes: $\overset{\frown}{FG}$, $\overset{\frown}{GF}$, $\overline{EF}$ et $\overline{EG}$

$F + S - A = 3 + 3 - 4$

$= 2$

c. Sphère:

2 faces: deux demi-sphères
2 sommets: I et J
2 arêtes: $\overset{\frown}{IJ}$ et $\overset{\frown}{JI}$

$F + S - A = 2 + 2 - 2$

$= 2$

Problème 89 (proposé par Maurice Brisebois)

Montrer que si n est un entier positif quelconque et m est un entier positif, le nombre entier

$$1 + n(n + 1)\ldots(n + m)$$

ne peut jamais être un carré parfait pour tout n sauf si $m = 3$.

Solution suggérée par M. Brisebois

On peut d'abord considérer que si m est un entier positif pair, le polynôme

$P(n;m) = 1 + n(n + 1)\ldots(n + m)$

est de degré $m + 1$ qui est impair et il s'ensuit que la racine carrée de $P(n;m)$ n'est pas dans ce cas un polynôme. On va se restreindre ici à l'étude du cas $m + 1 = 2k$ avec k entier positif et on posera:

$P(n;m)\ (n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_{k-1}n + a_k)^2$

où $a_1, \ldots, a_k$ sont des entiers positifs à déterminer.

Comme $P(0;m) = 1$,on a: $a_k = 1$ forcément.

On peut aussi écrire

$Q(n;m) = n(n + 1)\ldots(n + m) = (n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_{k-1}n + 1)^2 - 1$
$(n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_{k-1}n + 2)\ (n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_{k-1}n)$.

Comme les zéros du polynôme $Q(n;m)$ sont tous distincts et égaux à 0, -1, ..., $-m$ et que le produit des zéros du polynôme $n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_{k-1}n + 2$ vaut 2, ce dernier polynôme n'a en fait que deux zéros soit -1 et -2. En conséquence $k = 2$ et finalement $m = 2k - 1 = 3$ fournit la seule solution à ce problème. Par exemple, $1 + 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 = 43681$ qui est le carré de 209. Lorsque $m = 3$, on a : $1 + n(n + 1)(n + 2)(n + 3) = (n^2 + 3n + 1)^2$ car a_1 est l'inverse additif du nombre somme des zéros de $Q(n;3)$. On peut enfin remarquer que

$n^2 + 3n + 1 = n(n + 3) + 1 = (n + 1)(n + 2) - 1$

ce qui permet de calculer rapidement l'entier $\sqrt{P(n;3)}$.

Pour n = 13, on aura:

$\sqrt{1 + 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16} = 13 \cdot 16 + 1 = 14 \cdot 15 - 1 = 209.$

Les entiers n, $n + 1$, ..., $n + m$ étant des éléments d'une progression arithmétique de raison 1, je me suis ensuite demandé si on ne pouvait pas généraliser ce résultat au cas d'une progression arithmétique de raison $s > 1$. En suivant la même procédure décrite ci-haut, j'ai obtenu le résultat suivant: Si n,s sont des entiers positifs quelconques et m est un entier positif, alors l'entier $s^4 + n(n + s)...(n + sm)$ ne peut jamais être un carré parfait pour tous, n et s sauf si m = 3. Dans ce cas,

$s^4 + n(n + s)\,(n + 2s)\,(n + 3s) = (n^2 + 3sn + s^2)^2 = n(n + 3s) + s^2 = (n + s)\,(n + 2s) - s^2.$

Pour n = 97 et s = 5, on a:

$\sqrt{625 + 97 \cdot 102 \cdot 107 \cdot 112} = 97 \cdot 112 + 25 = 10\,889.$

Note 1: J'ai commencé à m'intéresser à ce problème en prenant connaissance d'une note parue dans la section Reader Reflection du munéro de mars 1991 de la revue Mathematics Teacher, p. 163. Un étudiant de 7[e] année de l'école Lawrence Middle School, N.Y., y présentait une solution partielle du problème que j'ai proposé en supposant a priori que $m = 3$

Note 2: Notons que dans le cas m = 3, l'identité

$$(n + 1)\,(n + 2) = n(n + 3) + 2$$

permet d'écrire

$$\begin{aligned} 1 + n(n + 1)\,(n + 2)\,(n + 3) &\equiv 1 + n(n + 3)\,(n(n + 3) + 2) \\ &\equiv (n(n + 3))^2 + 2n\,(n + 3) + 1 \\ &\equiv (n(n + 3) + 1)^2 \end{aligned}$$

La figure ci-contre illustre géométriquement la solution obtenue dans ce cas:

Note 3: Il est possible que, pour des valeurs de m différentes de 3, il existe une ou plusieurs valeurs de n telles que le nombre $(1 + n(n + 1)\,...(n + m))$ soit un carré parfait; en fait le cas n = 1, m = 6 donne $1 + 7! = (71)^2$. Mais si n = 2 et m = 6, on a $1 + 8! = 40321$ qui n'est pas un carré parfait.

Avant de présenter les nouveaux problèmes, nous présentons les commentaires de Charles-E. Jean concernant la solution suggérée en mars 1991 pour le problème 80.

Il existe 47 solutions différentes si on ne tient pas compte des permutations.

La répartition des solutions se fait comme suit:

$a + k + o = 12 + 13 + 11$: 18 solutions

$a + k + o = 15 + 10 + 11$: 15 solutions

$a + k + o = 14 + 10 + 12$: 14 solutions

Ce qui donne les solutions suivantes:

	A	B	D	G	K	K	L	M	N	O	O	J	F	C	A
1)	12	1	4	9	13	13	2	5	8	11	11	3	6	7	12
2)	12	1	4	9	13	13	2	6	7	11	11	3	5	8	12
3)	12	1	4	9	13	13	3	5	7	11	11	2	6	8	12
4)	12	1	5	8	13	13	2	4	9	11	11	3	6	7	12
5)	12	1	5	8	13	13	2	6	7	11	11	3	4	9	12
6)	12	1	6	7	13	13	2	4	9	11	11	3	5	8	12
7)	12	1	6	7	13	13	2	5	8	11	11	3	4	9	12
8)	12	1	6	7	13	13	3	4	8	11	11	2	5	9	12
9)	12	2	3	9	13	13	1	6	8	11	11	4	5	7	12
10)	12	2	3	9	13	13	4	5	6	11	11	1	7	8	12
11)	12	2	4	8	13	13	1	5	9	11	11	3	6	7	12
12)	12	2	4	8	13	13	3	5	7	11	11	1	6	9	12
13)	12	2	5	7	13	13	1	6	8	11	11	3	4	9	12
14)	12	2	5	7	13	13	3	4	8	11	11	1	6	9	12
15)	12	3	4	7	13	13	1	5	9	11	11	2	6	8	12
16)	12	3	4	7	13	13	1	6	8	11	11	2	5	9	12
17)	12	3	4	7	13	13	2	5	8	11	11	1	6	9	12
18)	12	3	5	6	13	13	2	4	9	11	11	1	7	8	12

	A	B	D	G	K	K	L	M	N	O	O	J	F	C	A
19)	15	1	4	9	10	10	3	7	8	11	11	2	5	6	15
20)	15	1	4	9	10	10	5	6	7	11	11	2	3	8	15
21)	15	1	5	8	10	10	2	7	9	11	11	3	4	6	15
22)	15	1	5	8	10	10	3	6	9	11	11	2	4	7	15
23)	15	1	6	7	10	10	4	5	9	11	11	2	3	8	15
24)	15	2	3	9	10	10	4	6	8	11	11	1	5	7	15
25)	15	2	3	9	10	10	5	6	7	11	11	1	4	8	15
26)	15	2	4	8	10	10	3	6	9	11	11	1	5	7	15
27)	15	2	4	8	10	10	5	6	7	11	11	1	3	9	15
28)	15	2	5	7	10	10	1	8	9	11	11	3	4	6	15
29)	15	2	5	7	10	10	3	6	9	11	11	1	4	8	15
30)	15	2	5	7	10	10	4	6	8	11	11	1	3	9	15
31)	15	3	4	7	10	10	1	8	9	11	11	2	5	6	15
32)	15	3	5	6	10	10	1	8	9	11	11	2	4	7	15
33)	15	3	5	6	10	10	2	7	9	11	11	1	4	8	15

	A	B	D	G	K	K	L	M	N	O	O	J	F	C	A
34)	14	1	5	9	10	10	2	7	8	12	12	3	4	6	14
35)	14	1	5	9	10	10	3	6	8	12	12	2	4	7	14
36)	14	1	5	9	10	10	4	6	7	12	12	2	3	8	14
37)	14	1	6	8	10	10	3	5	9	12	12	2	4	7	14
38)	14	2	4	9	10	10	3	6	8	12	12	1	5	7	14
39)	14	2	5	8	10	10	1	7	9	12	12	3	4	6	14
40)	14	2	5	8	10	10	4	6	7	12	12	1	3	9	14
41)	14	2	6	7	10	10	3	5	9	12	12	1	4	8	14
42)	14	2	6	7	10	10	4	5	8	12	12	1	3	9	14
43)	14	3	4	8	10	10	1	7	9	12	12	2	5	6	14
44)	14	3	4	8	10	10	2	6	9	12	12	1	5	7	14
45)	14	3	5	7	10	10	2	6	9	12	12	1	4	8	14
46)	14	4	5	6	10	10	1	7	9	12	12	2	3	8	14
47)	14	4	5	6	10	10	2	7	8	12	12	1	3	9	14

Problème no 82 (Retour) Mars 1991

Trouver, parmi les 2 100 premiers nombres naturels, le nombre de nombres qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 5.

Autre solution suggérée par Charles-E. Jean

On peut éliminer les entiers pairs à cause de la divisibilité par 2, puis ceux qui se terminent par 5 à cause de la divisibilité par 5. Le problème revient à trouver le nombre d'èntiers se terminant par 1, 3, 7 ou 9 qui ne sont pas divisibles par 3.

Dans la suite 1, 11, 21, 31, 41, 51, ..., 2081, 2091, le dernier nombre de chaque tranche de 3 est divisible par 3. Comme la suite contient 210 nombres, on peut compter 210 x (2/3) ou 140 nombres non divisibles par 3.

Dans la suite 3, 13, 23, 33, 43, 53, ..., 2083, 2093, le premier nombre de chaque tranche de 3 est divisible par 3. Comme la suite contient 210 nombres, on peut compter également 140 nombres.

Les suites 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, etc. et 9, 19, 29, 39, 49, 59, 69, etc. donnent également chacune 140 nombres. Dans la première suite, c'est le troisième nombre de chaque tranche de 3 qui est divisible par 3. Dans la seconde suite, c'est le premier nombre.

Au total, 560 entiers naturels inférieurs ou égaux à 2100 ne sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 5.

Nouveaux problèmes

Problème 90 (Michel Aubé)
(Ordre primaire)

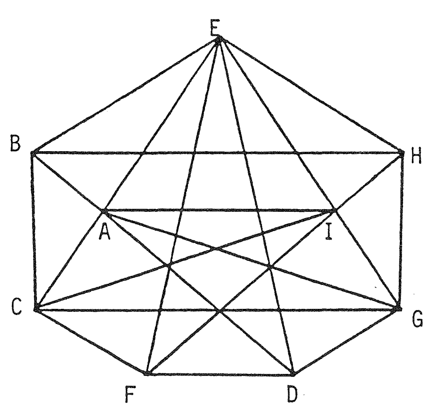
Pour n'importe quel entier positif, il existe une infinité de multiples qui ne sont formés que des chiffres 0 et 1.

Problème 91 (proposé par Charles-E. Jean)
(Primaire et secondaire)

Quels sont les multiples de 24, inférieurs à 2 424, ayant exactement 24 diviseurs ?

Problème 92 (proposé par Charles-E. Jean)
(Secondaire)

Soit la figure suivante:



Faire correspondre chacun des nombres suivants: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 à chacun des neuf sommets identifiés par les lettres A, B, C, D, E, F, G, H et I de telle manière que la somme des nombres soit la même pour chacun des huit triangles suivants: ABC, ADG, AEI, BEH, CEG, CFI, DEF et GHI.

Problème 93

Dans la revue du NCTM: *Mathematics Teacher, mai 1991, Vol. 81, no 5, p. 309,* on propose de généraliser le théorème de Pick qui donne la formule de l'aire d'un polygone dans un pointé ayant comme unité d'aire un petit carré (Fig. 1)

$$A = \frac{q}{2} + (p - 1)$$

où q est le nombre de points à l'intérieur du polygone et p est le nombre de points sur les côtés du polygone.

Si l'unité d'aire est un petit triangle (Fig. 2) ou si l'unité d'aire est un petit trapèze (Fig. 3), que devient la formule de Pick ?

Quelle serait la formule générale pour toute unité d'aire ?

Fig. 1

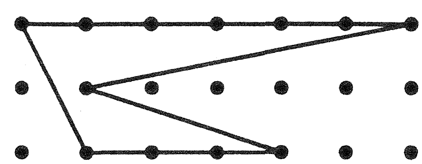


Fig. 2

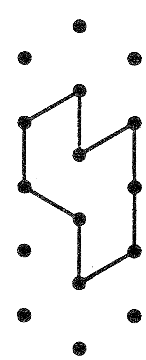
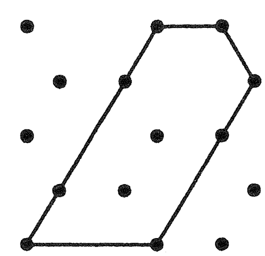


Fig. 3



Veuillez envoyer toute correspondance à:

Jean-Marie Labrie,
1431 rue Gauvin,
Sherbrooke,
J1K 2J2.