Jeux et problèmes

Jean-Marie Labrie

Depuis maintenant 8 ans, cette chronique ne laisse personne indifférent. On a même suggéré de faire une publication de toutes ces chroniques en une seule brochure. De toute façon, cette chronique continue pour une 9e année consécutive; je vous remercie de votre fidélité et votre intérêt.

Problème 76

Ce problème d'Apollonius a suscité beaucoup d'intérêt. Ce problème, en effet, peut être intégré dans le programme de mathématiques en 5^e secondaire. Dans le numéro précédent (Décembre 1990, Vol. XXX, No4, p.56), nous avons représenté 8 situations usuelles d'un cercle tangent à trois cercles. Jacques Sormany est allé plus loin dans ses constructions. Voici ce qu'il suggère à tous les lecteurs et lectrices du Bulletin:

a) Si l'un des cercles est intérieur à l'autre:

- **aucune** solution si le 3^e cercle est extérieur au plus grand ou intérieur au plus petit.

- 2 solutions si le 3^e cercle est tangent extérieurement au plus grand ou intérieurement au plus petit.

- 4 solutions dans tous les autres cas.

b) Si l'un des cercles est tangent intérieurement à l'autre:

- 2 solutions si le 3^e cercle est intérieur au plus petit ou extérieur au plus grand, ou encore s'il est tangent intérieurement au plus petit ou s'il est tangent extérieurement au plus grand (points de tangence distincts) ou s'il coupe les deux autres en leur point commun.

- 4 solutions dans le cas général.

- une infinité de solutions si les 3 cercles partagent le même point de tangence.

c) Si l'un des cercles est tangent extérieurement à l'autre:

- 2 solutions si l'un des cercles est intérieur à l'un des deux ou s'il les coupe en leur point de tangence ou encore s'il est tangent intérieurement à l'un d'eux ou s'il est tangent extérieurement aux deux.

- 4 solutions s'il est sécant à l'un et tangent à l'autre.

- 6 solutions s'il est sécant aux deux (ailleurs qu'en leur point commun).

- une infinité de solutions s'il est tangent aux deux, au même point de tangence.

d) Si deux des cercles sont mutuellement sécants:

- si le 3^e cercle est intérieur ou tangent, on est ramené aux cas précédents;

- si le 3^e cercle est extérieur aux 2 autres, on a 4 solutions;

- si le 3^e cercle coupe un des deux autres ou encore les deux en l'un de leurs points communs, on a 4 solutions;

- si le 3^e cercle est sécant aux deux autres en des points différents, on a 8 solutions.

e) Si les trois cercles sont mutuellement extérieurs, on a 8 solutions dont une ou deux peuvent éventuellement être dégénérées.

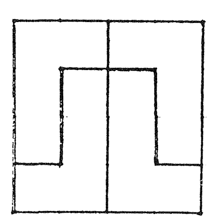
N.B. On ne reproduit pas ici les nombreuses représentations de tous ces cas.

Problème 77 Encore le carré!

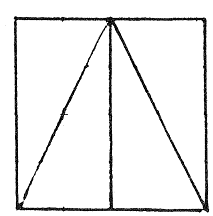
On a demandé de partager le carré en 4 figures congrues. Dans le numéro de décembre 1990, on a donné dix solutions différentes de ces partages.

On ajoute les solutions suivantes: (Jacques Sormany)

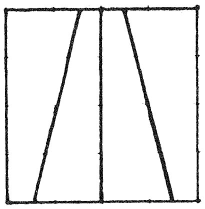
11) En forme de L



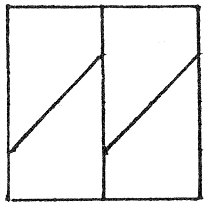
12) Formation de 4 triangles



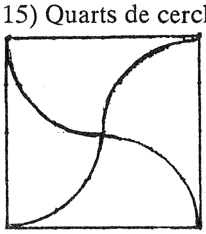
13) Formation de 4 trapèzes rectangles



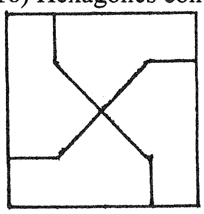
14) Idem



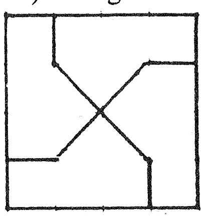
15) Quarts de cercle



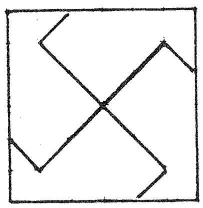
16) Hexagones concaves



17) Pentagones concaves



18) Croix grecque



Problème 78 Trouver une règle de divisibilité par 7.

Jacques Sormany propose le critère suivant:

Il est basé sur le reste de la division par 7 de:
1, 10, 100, 1000, 10 000, 100 000, 1 000 000, ...

Ces restes sont:

1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, ...

Ces restes (modulo 7) sont

1, 3, 2, -1, -3, -2, ...

Ce qui signifie qu'on multiplie les chiffres des:
unités par 1
dizaines par 3
centaines par 2
milliers par -1
dix milliers par -3
cent milliers par -2, etc.

On additionne le tout. Si le total est un multiple de 7, alors le nombre initial l'est également.

Exemple: Soit le nombre 770 485 233. Est-il divisible par 7?

3 x 1 + 3 x 3 + 2 x 2 + 5 x -1 + 8 x -3 + 4 x -2
+ 0 x 1 + 7 x 3 + 7 x 2

3 + 9 + 4 - 5 - 24 - 8 + 0 + 21 + 14

Donc le total est 14, multiple de 7.

Le nombre 770 485 233 = 7 x 110 069 319.

N.B. Ce type de critère existe également pour la division par 13, 37, 17, 23, ... Mais un tel critère est peu pratique et c'est plus compliqué que d'effectuer la division elle-même.

Problème 79

Le produit des âges d'un groupe de jeunes adolescentes et adolescents est égal à 10 584 000. Trouver le nombre de personnes dans ce groupe et la somme de leurs âges.

Solution suggérée:

1) Décomposition du nombre 10 584 000:

$10\ 584\ 000 = 2^6 \text{ x } 3^3 \text{ x } 5^3 \text{ x } 7^2$

2) On regroupe autrement:

$10\ 584\ 000 = 2^4 \text{ x } (3 \text{ x } 5)^3 \text{ x } (2 \text{ x } 7)^2$

$= 16 \text{ x } 15 \text{ x } 15 \text{ x } 15 \text{ x } 14 \text{ x } 14$

3) Ce qui donne 3 types d'âge différent:
16 ans, 15 ans et 14 ans.

4) Ce qui fait en tout 6 adolescentes ou adolescents.

5) Le total des âges est: 89 ans.

Problème 80: Jeu de billard!

Au billard, il y a 15 boules numérotées de 1 à 15. Au départ, les quinze boules sont placées sous la forme triangulaire. Vous le savez, il y a 15! façons de les permuter. Nous désirons, parmi ces 15! façons, la disposition qui correspond aux conditions suivantes:

a. La somme des trois boules au centre doit être égale à 39.

b. La somme des cinq boules de chaque côté du triangle doit être égale à 39.

Trouver au moins trois façons différentes de placer les boules de façon à satisfaire ces deux conditions.

Solution suggérée:

Soit la disposition des 15 boules sous la forme d'un triangle:

a
b c
d e f
g h i j
k l m n o

1) Il existe trois cas pour lesquels e + h + i = 39
   a) 10 + 14 + 15
   b) 12 + 13 + 14
   c) 11 + 13 + 15

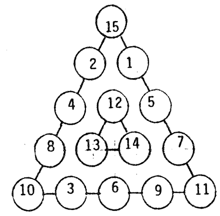
2) Soit le cas 10, 14 et 15.

Pour le grand triangle, on a pour:

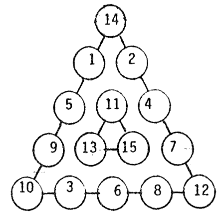
le 1^er^ côté	2^e^ côté	3^e^ côté
a) 12,1,4,9,13	13,3,5,7,11	11,2,6,8,12
b) 12,1,4,9,13	13,2,6,7,11	11,3,5,8,12
c) 12,2,3,9,13	13,4,5,6,11	11,1,7,8,12
d) 12,2,3,9,13	13,1,6,8,11	11,4,5,7,12
e) 12,1,5,8,13	13,2,4,9,11	11,3,6,7,12
f) 12,1,6,7,13	13,2,5,8,11	11,3,4,9,12
g) 12,1,6,7,13	13,3,4,8,11	11,2,5,9,12
h) 12,2,4,8,13	13,3,5,7,11	11,1,6,9,12
i) 12,2,4,8,13	13,1,6,7,11	11,3,5,9,12
j) 12,2,4,8,13	13,1,5,9,11	11,3,6,7,12
k) 12,3,4,7,13	13,2,5,8,11	11,1,6,9,12
l) 12,3,4,7,13	13,1,5,9,11	11,2,6,8,12
m) 12,3,4,7,13	13,1,6,8,11	11,2,5,9,12
n) 12,2,5,7,13	13,1,6,8,11	11,3,4,9,12
o) 12,2,5,7,13	13,3,4,8,11	11,1,6,9,12
p) 12,3,5,6,13	13,2,4,9,11	11,1,6,9,12

etc.

3) Pour le cas 12, 13, 14, il existe un grand nombre de solutions, dont voici une des solutions:



4) Pour le cas 11, 13 et 15, il existe également un grand nombre de solutions dont voici l'une d'elles:



N.B. Est-il possible de savoir le nombre exact de solutions dans chaque cas? Si oui, comment le montrer?

Pour le problème no 81, nous attendons encore des solutions.

Voici les nombreux jeux et problèmes de ce numéro:

Problème no 82

Trouver, parmi les 2 100 premiers nombres naturels, le nombre de nombres qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 5.

Problème no 83

Partager un carré en 6 carrés, en 7 carrés et en 8 carrés.

Trouver une règle qui permettrait de savoir à l'avance qu'on peut partager un carré en 100 carrés disjoints.

Problème no 84

Vieux problème de chapeaux!

Quatre mathématiciens A, B, C et D ont découvert le problème suivant. Le mathématicien A a d'abord fait asseoir les trois autres l'un derrière l'autre de façon que B puisse voir C et D, que C voit seulement D et que D ne voit ni B, ni C.

A a cinq chapeaux qu'il montre aux trois autres: 3 chapeaux sont verts et les deux autres sont rouges. A met un chapeau sur chaque mathématicien assis l'un derrière l'autre et rejette les deux chapeaux qui restent.

A pose la question suivante à B: quelle est la couleur de ton chapeau? B répond qu'il est incapable de le dire.

Ensuite, A pose la question suivante à C: quelle est la couleur de ton chapeau? C répond qu'il est incapable de le dire. Finalement, A pose la même question à D: quelle est la couleur de ton chapeau? D donne la bonne réponse.

Veuillez envoyer toute correspondance à Jean-Marie Labrie,
1431, rue Gauvin
Sherbrooke J1K 2J2