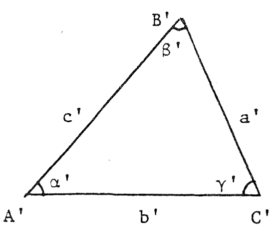
Dans nos classes

Par Loïc Thérien, Université de Sherbrooke

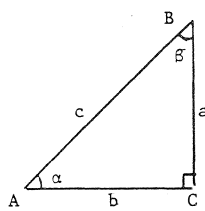
Pour une présentation motivante de la loi des cosinus.

La loi des cosinus a une allure plutôt rébarbative pour les élèves du secondaire. Partant du principe didactique éprouvé qu'il est plus facile d'aller du connu vers l'inconnu ou, en d'autres mots, de greffer les nouvelles connaissances sur les anciennes, nous présentons ici une introduction de la loi des cosinus qui respecte ce principe et donne, nous semble-t-il, un sens clair et facile d'accès à cette loi ainsi qu'un moyen mnémotechnique efficace.

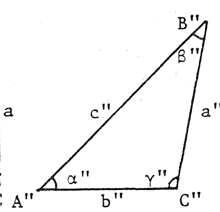
Considérons les trois triangles suivants comportant entre eux un angle et un côté congrus ($\alpha=\alpha'=\alpha''$ et $c=c'=c''$).



(1)



(2)



(3)

Partons de l'idée que l'on désire trouver une relation mathématique générale entre les 3 côtés de chacun de ces triangles. Pour le triangle rectangle, nous en connaissons une célèbre et remarquable, celle de Pythagore:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

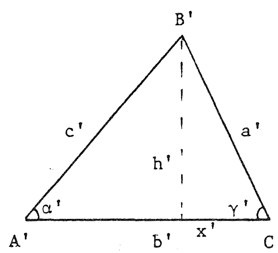
Si cette relation est valable pour le triangle 2, ne pourrait-on pas l'appliquer aux triangles 1 et 3, moyennant une "correction" variable, en moins ou en plus, pour tenir compte du fait que $a'^2 + b'^2$ est plus grand que $a^2 + b^2$ et que $a''^2 + b''^2$ est plus petit[1] que $a^2 + b^2$? En d'autres mots, existe-t-il une relation du type:

$$c'^2 = a'^2 + b'^2 - \text{correction},$$

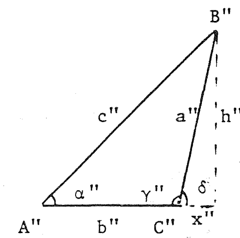
ou

$$c''^2 = a''^2 + b''^2 + \text{correction ?}$$

Une telle hypothèse, à priori plausible, incite à bâtir une argumentation qui utilise la relation de Pythagore, en construisant sur les triangles 1 et 3 un triangle rectangle, construction qui est d'ailleurs celle utilisée dans la démonstration classique de la loi des cosinus.



(1)



(3)

De ces constructions, on tire

(1) $c'^2 = h'^2 + (b'-x')^2 = h'^2 + b'^2 - 2b'x' + x'^2$

$$= (h'^2 + x'^2) + b'^2 - 2b'x' = a'^2 + b'^2 - 2b'x'$$

or, $x' = a'\cos\gamma'$. D'où:

$$c'^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b'\cos\gamma'$$

$\cos\gamma'$ étant en l'occurence positif, on a $2a'b'\cos\gamma' > 0$, et il s'agit alors bien d'une correction en moins, en accord avec notre hypothèse de départ.

(3) $c''^2 = h''^2 + (b''-x'')^2 = h''^2 + b''^2 + 2b''x'' + x''^2$

$$= (h''^2 + x''^2) + b''^2 + 2b''x'' = a''^2 + b''^2 + 2b''x''$$

or, $x'' = a''\cos\delta = -a''\cos\gamma''$. D'où:

$$c'^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b'\cos\gamma'$$

$\cos\gamma''$ étant en l'occurence négatif, on a $2a''b''\cos\gamma'' < 0$, et il s'agit alors bien d'une correction en plus, en accord aussi avec notre hypothèse de départ.

Dans les deux cas, la relation trouvée a formellement la même allure, c'est-à-dire, de façon générale:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Et ceci est bien la **relation de Pythagore, moins une correction** qui peut devenir positive, nulle ou négative selon que l'angle γ est plus petit, égal ou plus grand que 90 °!

Loïc Thérien, professeur
Faculté d'éducation
Université de Sherbrooke

---

(1) Si on pose $b = b'' + x''$, alors $a''^2 + b''^2 = (a^2 + x''^2) + b''^2 = a^2 + (x''^2 + b''^2) < a^2 + (x'' + b'')^2 = a^2 + b^2$