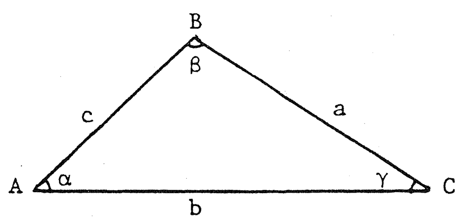
Une vision mécaniste des conditions minimales pour le calcul des paramètres manquants d'un triangle

Loïc Thérien

On sait qu'il est possible, connaissant certains paramètres d'un triangle - côtés ou angles -, de calculer ceux qui ne sont pas connus, en faisant appel, soit à la loi des sinus, soit à la loi des cosinus. Il n'est cependant pas toujours facile pour l'élève d'identifier ces conditions et de savoir quelle loi appliquer. L'approche que nousp résentons ici, toute limitée qu'elle soit, a l'avantage, croyons-nous, de fournir une prise concrète et facilemen compréhensible sur un problème autrement dépourvu de signification intuitive. Elle offre surtout l'occasion de motiver l'introduction de formules mathématiques comme réponses naturelles à une situation concrète, justifiant par le fait même leur existence et leurs différences.

Considérons un triangle quelconque comme celui ci-contre.



Approche concrète

Imaginons ce triangle composé de matériaux tels que ses paramètres demeurent mobiles tant qu'ils ne sont pas numériquement fixés. Par paramètres, nous entendons les valeurs α, β, γ, a, b, c.

Cette situation pourrait se concrétiser à l'aide, par exemple, d'élastiques sur un géo-plan et d'un rapporteur d'angle pour fixer les angles. On pourrait aussi penser à trois tiges à longueur variable et jointes par des «écrous à oreilles», chaque partie devenant fixe au besoin (côtés ou angles). Ces suggestions ne servent, bien sûr, qu'à démontrer qu'il est possible de représenter concrètement cette situation, mais elles ne sont pas nécessaires, l'imagerie mentale ayant aussi ses vertus didactiques propres.

Alors, la matérialisation concrète des conditions pour calculer les autres paramètres du triangle sera l'absence de «degrés de liberté», ou de mobilité, du triangle. En d'autres mots, les ensembles de paramètres minimaux qui «rigidifient» le triangle représenteront les conditions minimales pour le calcul des autres paramètres.

Listons ces ensembles minimaux:

Cas 1. Si aucun angle n'est connu, il faut alors connaître les trois côtés.

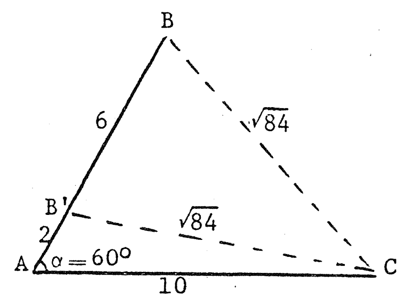
En effet, si deux côtés seulement sont connus, l'angle entre eux demeurera libre. Par contre, la connaissance du troisième côté fixera cet angle et, par le fait même, tout le triangle.

Cas 2. Si un seul angle est connu, il faut alors connaître les deux côtés adjacents à cet angle.

La connaissance d'un seul côté, quel qu'il soit, ne suffit pas à rigidifier le triangle, puisque cela revient à fixer la distance entre deux sommets, sans pour autant fixer le troisième qui peut alors se déplacer tout en préservant l'angle connu.

Par ailleurs, la fixation des **deux côtés adjacents** à l'angle connu rigidifie évidemment le triangle.

Mais il est nécessaire qu'il s'agisse des deux côtés adjacents, car fixer un **côté adjacent et un côté opposé** à l'angle connu peut encore laisser place à plus d'un triangle. On voit bien, par l'exemple suivant, comment cette situation peut se concrétiser à l'aide d'un matériel adéquat:



Bien que AC (= 10) et BC (= B'C = $\sqrt{84}$) soient fixés, ils déterminent deux triangles distincts avec $\alpha = 60°$, soit AB'C et ABC.

Cas 3. Si seulement deux angles sont connus, il faut alors connaître un côté quel qu'il soit.

En effet, la connaissance de deux angles «rigidifie» le troisième et seules des dilatations du triangle demeurent possibles. Mais ces dilatations deviennent impossibles dès que l'un des côtés est fixé.

Cette liste est exhaustive puisque le seul cas théorique restant est celui de «3 angles connus». Or, il ne peut rigidifier le triangle, puisqu'il détermine toute une classe de triangles semblables. Et la connaissance supplémentaire d'un côté quelconque revient au cas 3.

Bien sûr, les argumentations qui précèdent peuvent présenter quelques difficultés lorsqu'énoncées dans l'abstrait, mais elles deviennent limpides accompagnées d'une concrétisation.

Approche mathématique

Suivant cette conception «mécaniste», on peut décemment faire l'hypothèse qu'à la rigidification du triangle, assurée par la fixation d'un ensemble minimal de paramètres, correspondra une ou des formules permettant de calculer de proche en proche les autres paramètres. Autrement dit, cette hypothèse consiste à supposer qu'il existe un correspondant mathématique à l'évidence mécanique, ce qui, en soi, est l'assise intuitive fondamentale d'une bonne partie de la recherche mathématique. Par ailleurs, la contraposée de cette hypothèse est la preuve concrète de la consistance de tout modèle ou formule. Or, cette hypothèse se trouve ici renforcée, puisque ces formules existent et sont, en l'occurence, la loi des sinus et la loi des cosinus. À l'inverse, il tombe sous le sens que si un ensemble de paramètres ne peut rigidifier le triangle, il est illusoire de chercher à développer des formules servant à déterminer de façon univoque les autres paramètres.

Rappelons la loi des sinus,

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c},$$

de même que la loi des cosinus

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

(où les rôles des paramètres sont interchangeables au gré de la notation retenue).

On constate que le cas 1 se résout par la loi des cosinus, puisqu'elle permet de déterminer l'angle γ et, par un cheminement semblable, les autres angles.

On constate que le cas 2 se résout par la loi des cosinus, puisque, connaissant γ, a et b, elle permet de calculer c et, de proche en proche, les autres angles.

On constate, enfin, que le cas 3, quant à lui, se résout par la loi des sinus.

De sorte que l'on peut résumer comme suit les ensembles minimaux de «rigidification» du triangle ainsi que les lois qui y correspondent:

angles connus	côtés connus	loi
0	3	cosinus
1	2 côtés adjacents	cosinus
2	1	sinus

On peut aussi constater, cette fois de façon mathématique, pourquoi le cas **d'un angle connu ainsi qu'un côté adjacent et un côté opposé connus** ne suffit pas à rigidifier le triangle, c'est-à-dire à déterminer univoquement le triangle.

Supposons, en effet, α, a et b connus. Par la loi des sinus,

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} \quad \text{ou} \quad \sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a},$$

de sorte que β peut prendre **deux valeurs** selon que $\beta > 90°$ ou que $\beta > 90°$.

Ce phénomène se voit aussi, bien sûr, à l'aide de la loi des cosinus, puisque

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

d'où

$$c^2 - 2bc\cos\alpha - (a^2 - b^2) = 0$$

qui est une équation quadratique en c avec **deux racines.**

Mais lorsqu'on possède des indices supplémentaires sur le triangle cherché comme, par exemple, sur β (plus petit ou plus grand que 90°) ou sur la longueur approximative du troisième côté, la loi des sinus ou la loi des cosinus permet alors de trouver les autres paramètres. Ces indices permettent d'ailleurs d'en faire autant avec un matériel concret.

Un cas particulier où l'on possède naturellement des informations supplémentaires est celui d'un triangle rectangle où un angle est connu et vaut 90°. Pour rigidifier ce triangle, il suffit alors de connaître

1 côté et un autre angle

ou

2 côtés.

Le premier cas se résout par la loi des sinus qui se particularise ici à la **définition du sinus dans un triangle rectangle.** Le deuxième cas se résout par la loi des cosinus qui se particularise ici au **théorème de Pythagore.**

Le développement qui précède montre, nous semble-t-il, qu'il est quelquefois possible et souhaitable, afin de motiver des développements mathématiques, de faire se répondre en écho - comme nous venons de le faire - le concret et l'abstrait et de les présenter alors comme les deux faces d'une même réalité.

Loïc Thérien, professeur
Faculté d'éducation
Université de Sherbrooke