Jeux et problèmes

Jean-Marie Labrie

Cette chronique termine sa 8e année. Elle avait été proposée alors par la présidente de l'AMQ, Madame Louise Trudel. Plusieurs enseignantes et enseignants ont manifesté, lors des congrès surtout, leur appréciation et je les remercie bien sincèrement. Je compte sur leur collaboration dans la poursuite des objectifs de cette chronique. Je rappelle que cette chronique s'adresse à tous et toutes, sans exception. Parfois, les problèmes sont de niveau secondaire; parfois, ils font appel à des outils moins connus. Mais, dans l'ensemble, j'essaie de piquer votre curiosité par des activités qui ne demandent que de la créativité et de la ténacité dans la recherche d'une solution.

Je profite de cette chronique pour remercier, au nom de l'AMQ, Monsieur Jacques Sormany. Depuis un an, en effet, il a manifesté beaucoup d'intérêt pour la fameuse «valise mathématique» (en fait, il en a deux!). Dans ces valises, on compte plusieurs jeux et quelques problèmes particuliers. Comme cette valise existe depuis une quinzaine d'années et qu'elle s'est promenée un peu partout, il fallait quelqu'un pour tout remettre en ordre et d'en faire un inventaire précis. Or, tout un travail de remise en ordre et de classification a été entrepris et réalisé par Monsieur Sormany. Il a même réparé plusieurs boîtes qui contiennent ces jeux.

Dans cette «valise mathématique», la plupart des jeux sont encore d'actualité. Bien sûr, plusieurs jeux nouveaux et intéressants ne sont pas là. Faudra-t-il les ajouter? De toute façon, il ne faudrait pas alors surcharger les deux valises actuelles. En fait, si on veut compléter cette valise mathématique, il faudrait ajouter une autre valise. Ce qui compliquerait un peu le transport de ces valises.

Contrairement à ce qu'on pourrait penser, cette valise mathématique a été pratiquement toujours utilisée depuis que j'en suis responsable. Par exemple, Monsieur Sormany a utilisé ces jeux au Camp mathématique qui a eu lieu à Chicoutimi en juin dernier. De plus, il a organisé des ateliers dans deux écoles secondaires à Chicoutimi.

Présentement, cette «valise mathématique» est dans mon bureau à l'Université de Sherbrooke.

Passons maintenant à la chronique elle-même. D'abord, j'aimerais publier un texte de Monsieur Jacques Sormany:

> *«Monsieur Essaïm Laabid, auteur de l'article* De la religion à l'algèbre: problèmes de partages successoreaux selon les lois islamiques, *a certainement déjà vu le problème suivant, bien connu:*
>
> Un paysan arabe, en mourant, lègue sa fortune à ses trois héritiers: au 1er, il donne la moitié; au 2e, il donne le tiers et au 3e, il donne le neuvième. Or, il n'avait comme biens que 17 chameaux. Soucieux de respecter les volontés du défunt mais effrayés à l'idée de devoir couper en morceaux plusieurs animaux précieux, les trois héritiers vont trouver le sage du village pour lui demander conseil. Quelle solution le sage apportera-t-il au partage de façon qu'aucun animal ne soit coupé?

Solution proposée par le sage

Après avoir joint au troupeau son propre chameau (pour un total de 18), le sage en donne 9 au 1er héritier, 6 au 2e héritier et 2 au 3e héritier (ce fait 17 en tout), gardant ainsi le sien! Chaque héritier repart content:

le 1er a hérité de 9 chameaux au lieu de $8\frac{1}{2}$,

le 2e a hérité de 6 chameaux au lieu de $5\frac{2}{3}$ et

le 3e a hérité de 2 chameaux au lieu de $1\frac{8}{9}$.

L'explication mathématique de ce problème est évidemment que $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$ non pas $\frac{17}{17}$.

Problème 69 (Bulletin AMQ, mars 1990)

Monsieur Sormany donne une généralisation de ce problème. Deux entiers positifs sont dans le rapport $\frac{a}{b}$ (a et b sont premiers entre eux). En ajoutant à chacun un entier positif k, le rapport devient $\frac{c}{d}$. Quelles sont les valeurs possibles de k pour a, b, c et d connus?

Réponse suggérée: Soit ar et br les deux premiers entiers.

$$\frac{ar+k}{br+k}=\frac{c}{d} \text{ d'où, } \begin{aligned} d(ar+k) &= c(br+k) \\ dar+dk &= cbr+ck \\ dar-cbr &= ck-dk \\ &= k(c-d) \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } r=\frac{k(c-d)}{ad-bc}$$

Il faut et il suffit que $\frac{k(c-d)}{ad-bc}$ doit un nombre entier.

Remarque. On pourrait même étendre cette généralisation aux entiers négatifs.

Problème 74 de C.E. Jean (voir Bulletin AMQ, mai 1990)

Dans tout carré magique de dimension 3×3 et de densité

D, la case centrale doit être occupée par le nombre (D / 3). On peut donc remplir le carré comme suit:

$109 - \frac{D}{3}$	$\frac{2D}{3} - 90$	$\frac{2D}{3} - 19$
$\frac{4D}{3} - 128$	$\frac{D}{3}$	$128 - \frac{2D}{3}$
19	90	$D - 109$

La borne inférieure de D, pour que toutes les quantités soient positives, est contenue par:

$$\frac{2D}{3} - 90 > 0$$

D'où, $D > 135$ et D doit être un multiple de 3.

Donc, $D = 138$; ce qui donne le carré magique suivant:

63	2	73
56	46	36
19	90	29

J. Sormany

Problème 75 de C. E. Jean (Bulletin AMQ, Mai 1990)

a. Petits rectangles dans le même sens que la feuille:
$(50 - 12 + 1)\ (60 - 15 + 1)$
$39 \times 46 = 1\ 794$ rectangles

b. Petits rectangles orientés transversalement:
$(50 - 15 + 1)\ (60 - 12 + 1)$
$36 \times 49 = 1\ 764$ rectangles

Grand total: 3 558 rectangles possibles.

Remarque. Une généralisation de ce problème pourrait s'énoncer comme suit:

Le nombre de rectangles de (xy) possibles dans une feuille quadrillée XY ne donne malheureusement pas de formule générale plus simple que $(X - x + 1)\ (Y - y + 1)\ +\ (X - y + 1)\ (Y - x + 1)$.

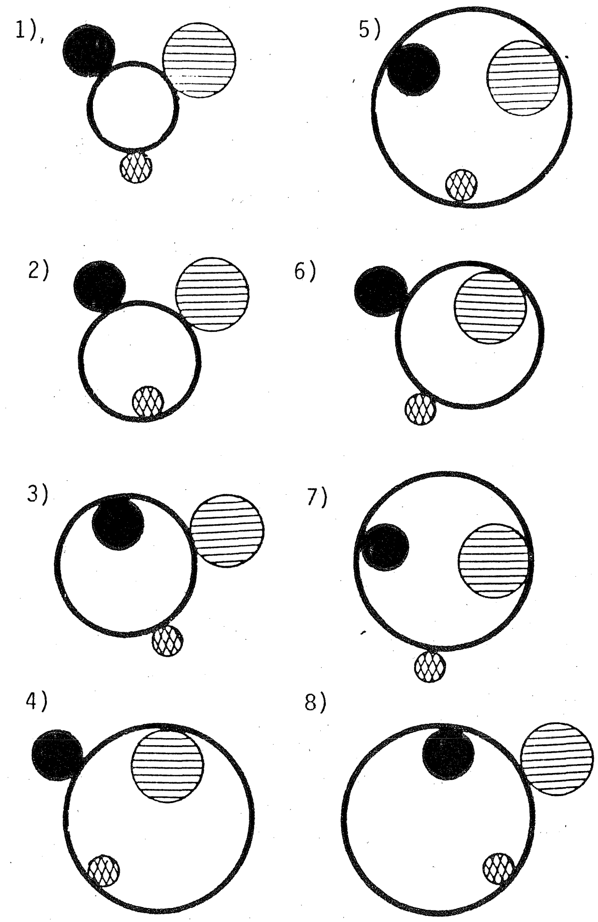
J. Sormany

Problème 76: Un problème d'Apollonius!

Trouver toutes les situations différentes dans lesquelles un cercle est tangent à chacun des trois autres cercles donnés.

Solution suggérée:

Voici les 8 situations des 4 cercles:

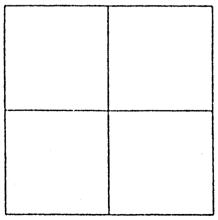
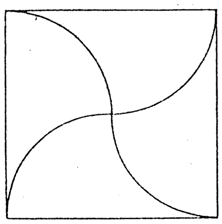


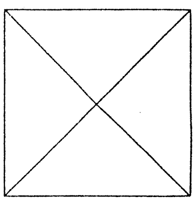
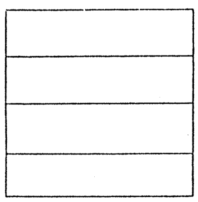
Problème 77: Encore le carré!

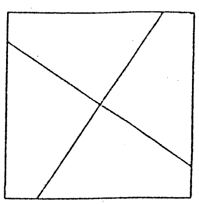
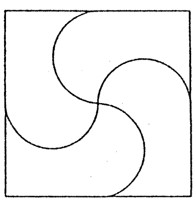
A. Partager un carré en quatre figures congrues de façon que l'on ait:
   a. Des triangles isocèles rectangles
   b. Des rectangles
   c. Des quadrilatères quelconques cycliques
   d. Des figures limitées par deux segments de droite et deux demi-cercles.
   e. Des figures en forme de T majuscule
   f. Des figures en forme de L majuscule

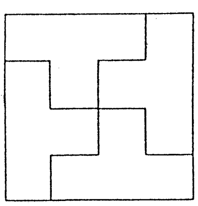
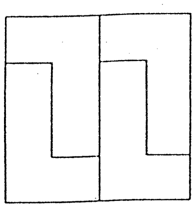
B. Trouver d'autres types de partage original du carré.

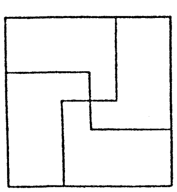
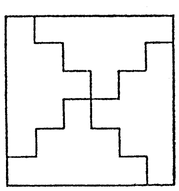
Voici quelques solutions suggérées:

a.  b. 

c.  d. 

e.  f. 

g.  h. 

i.  j. 

Problème 78: Un test pour les nombres!

Trouver une règle de divisibilité par 7.

Suggestions pour ce problème:

Plusieurs auteurs ont parlé de la divisibilité d'un nombre écrit dans un système quelconque de numération par un diviseur quelconque (écrit dans le même système). Grâce à l'algèbre, il existe une règle généralisée de divisibilité. Une telle généralisation donne les règles spéciales pour tous les cas. Ici, il serait trop long de proposer cette généralisation. Je préfère vous donner quelques références intéressantes à ce sujet.

1re: A. BASKT (1957), **Amusements mathématiques,** Ch. VII, pp. 72-86 Éditeur Dunod.

2^{e} : B. KORDIEMSKY (1963), **Sur le sentier des mathématiques**, Tome 2, Ch. 1, pp. 23-30. Ed. Dunod.

3^{e} : M. GARDNER (1971), **Le paradoxe du pendu** et autres divertissements mathématiques, Ch. 14, pp. 156-165, Ed. Dunod.

On peut faire observer quelques propriétés qui sont démontrables.

1) Si un nombre quelconque de 2 chiffres est divisible par 7, le nombre inversé, augmenté du chiffre des dizaines du nombre considéré, est également divisible par 7.

2) Si un nombre quelconque de 3 chiffres est divisible par 7, le nombre inversé, diminué de la différence entre le chiffre des unités et celui des centaines du nombre considéré, est également divisible par 7.

3) Si la somme des chiffres d'un nombre de 3 chiffres est égale à 7, ce nombre est divisible par 7, seulement à condition que le chiffre des dizaines et celui des unités soient semblables. La réciproque est également vraie.

Nouveaux problèmes et jeux

Problème 79:

Le produit des âges d'un groupe de jeunes adolescentes et adolescents est égal à 10 584 000. Trouver le nombre de personnes dans ce groupe et la somme de leurs âges.

Problème 80: Jeu de billard!

Au billard, il y a 15 boules numérotées de 1 à 15. Au départ, les quinze boules sont placées sous la forme triangulaire. Vous le savez, il y a 15! façons de les permuter. Nous désirons, parmi ces 15! façons, la disposition qui correspond aux conditions suivantes:

a. La somme des trois boules au centre doit être égale à 39.

Pour la suite, voir page 14.

b. La somme des cinq boules de chaque côté du triangle doit être égale à 39.

Trouver au moins trois façons différentes de placer les boules de façon à satisfaire ces deux conditions.

Problème 81 (proposé par J. Sormany)

a. Un tiroir contient pêle-mêle 2n chaussettes formant «n» paires de r couleurs différentes. Une panne de courant plonge soudain la pièce dans l'obscurité complète. Combien de chaussettes faut-il prendre à l'aveuglette pour être sûr d'en avoir au moins «p» paires non dépareillées? ($p \leq r \leq n$)

b. Même problème avec des gants.

Veuillez adresser vos commentaires et réponses à:

Jean-Marie Labrie
1413, rue Gauvin
Sherbrooke J1K 2J2

Jean-Marie Labrie
Faculté d'éducation
Université de Sherbrooke