Jeux et problèmes

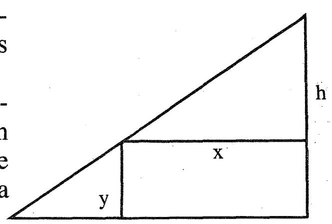
par Jean-Marie Labrie

Je viens de recevoir une lettre de Baie-Comeau qui fait plaisir; elle vient de Madame Lise St-Pierre. Voici ce qu'elle écrit:

Ce n'est pas surprenant que la chronique: ***Jeux et Problèmes*** *du Bulletin AMQ dure depuis tant d'années: personnellement j'aime bien m'attaquer à ces problèmes tout en surveillant mes élèves qui font un examen; cela me permet de vivre les mêmes émotions qu'eux au même moment, c'est-à-dire, l'anxiété devant un problème inconnu, l'excitation lorsqu'on a l'impression d'être sur la bonne voie, la joie de la découverte ou la déception que notre intuition de départ ne mène nulle part et la peur d'être jugée moins intelligente que d'autres! J'attends donc la prochaine chronique avec impatience.*

Je remercie Lise de nous avoir partagé ces commentaires qui stimuleront tous nos lecteurs et lectrices. De plus, elle nous transmet un problème qui a surgi lors d'un entretien avec un élève pendant un cours de MATH 103 (niveau collégial). Elle intitule son récit: **Dialogue autour d'un problème d'optimisation.**

Dans le cours **Calcul différentiel et intégral I,** on demande aux élèves de résoudre des problèmes de ce genre: Trouver les dimensions du rectangle d'aire maximale qu'on peut inscrire dans un triangle rectangle dont la base est b et la hauteur h.



On trouve, à l'aide de la dérivée, que $x = \frac{b}{2}$ et $y = \frac{h}{2}$.

1^re^ étape: durant le cours

Élève: On n'a pas besoin de la dérivée pour faire cela.

Professeur: Ah oui?

Élève: Si $\frac{x}{y} = \frac{b}{h}$, l'aire sera maximale.

Professeur: Un instant! Pourquoi l'aire est-elle maximale si $\frac{x}{y} = \frac{b}{h}$?

Élève: Ben, ça se voit; voyons!

Professeur: Ben, je ne vois rien. Explique-le ou prouve-le!

Élève: Euh!

2^e^ étape: Le lendemain

Élève: Voilà! Si l'aire est maximale, alors $x = \frac{b}{2}$ et $y = \frac{h}{2}$; par conséquent, $\frac{x}{y} = \frac{b/2}{h/2}$ ou $\frac{b}{h}$.

Professeur: Tu viens de montrer que si l'aire est maximale, alors $\frac{x}{y} = \frac{b}{h}$. Mais la question était de montrer que si

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{h}, \text{ alors l'aire sera maximale!}$$

Élève: Euh!

3^e^ étape: Deux semaines plus tard

Élève: Je n'arrive à rien! Comment fait-on cela?

Professeur: Euh!

Soit un rectangle de dimensions x et y inscrit dans un triangle rectangle de base b et de hauteur h.

On a les deux énoncés suivants:

a) Si $\frac{x}{y} = \frac{b}{h}$, alors l'aire du rectangle inscrit est maximale.

b) Si $\frac{x}{y} = \frac{b}{h}$, alors $x = \frac{b}{2}$ et $y = \frac{h}{2}$.

Ces deux énoncés sont équivalents puisqu'on montre que l'aire du rectangle inscrit est maximale si et seulement

$$\text{si } x = \frac{b}{2} \text{ et } y = \frac{h}{2}.$$

Question: Que faut-il en penser après cette lecture?

Problème 67 (Bull. AMQ, déc. 1989)

a. Nous savons que $1+3+5+7=16$ ou 4^2. Trouver d'autres ensembles formés de 4 nombres impairs consécutifs dont la somme est un carré parfait.

b. Peut-on former des ensembles de 4 nombres pairs consécutifs dont la somme est également un carré parfait? Si oui, comment?

c. Pourquoi la somme de 4 nombres naturels consécutifs ne donne-t-elle pas un carré parfait?

d. Montrer que si la somme des 4 premiers termes d'une progression arithmétique est un carré (m^2), alors la raison et la valeur de m sont de nombres pairs.

e. Trouver une progression arithmétique dont la raison est 4 et dont la somme des 4 premiers termes est 324.

Ce problème a suscité beaucoup de solutions et de commentaires; c'est la 4^e^ fois qu'on en parle dans cette revue. Nous vous remercions de votre intérêt. Voici un dernier commentaire que j'ai reçu de Jacques Sormany qui dit que ce problème qui a fait couler beaucoup d'encre est d'une simplicité élémentaire!

Soit les quatre termes: $n-3$, $n-1$, $n+1$ et $n+3$.
Leur somme est évidemment $4n$.
Pour que ce soit un carré parfait, il suffit que la moyenne «n» soit elle-même un carré parfait.
Plus généralement, les 4 termes sont de la forme suivante:

$n-\frac{3r}{2}$, $n-\frac{r}{2}$, $n+\frac{r}{2}$ et $n+\frac{3r}{2}$.

Si l'on additionne 9 termes consécutifs d'une progression arithmétique (au lieu de 4), il suffit que le terme du milieu soit un carré parfait et cette fois la raison r n'a plus besoin d'être paire.

Problème 70: Les 12 pentominos!
(Bulletin AMQ, mars 1990, pp. 40-41)

Jacques Sormany nous envoie la remarque suivante:

On pourrait ajouter que le pentomino de forme Z admet un centre de symétrie; ce qui laisse 5 pentominos totalement asymétriques: F, L, N, P et Y.

Problème 73

a. Trois cercles concentriques ont respectivement comme rayons $3x$, $4x$ et $5x$. Exprimer l'aire de chaque anneau comme une fraction de l'aire du cercle interne. Fig. 1.

b. L'intérieur d'un cercle peut être divisé en cinq parties dont les aires sont égales: on obtient 4 anneaux et un cercle central. Si les rayons des cinq cercles sont ordonnés comme suit: $r_1<r_2<r_3<r_4<r_5$, montrer que $r_4 = \sqrt{2}\,r_2 = 2r_1$. Fig. 2.

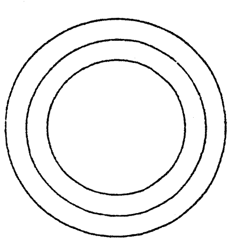


Figure 1

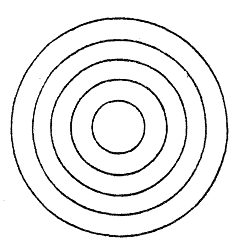


Figure 2

Solution proposée par Jacques Sormany

a. Aire du cercle central: $\pi(3x)^2 = 9\pi x^2$

Aire du cercle intermédiaire: $\pi(4x)^2 = 16\pi x^2$

Aire de l'anneau: $7\pi x^2$

Aire du cercle externe: $\pi(5x)^2 = 25\pi x^2$

Aire du grand anneau: $25\pi x^2 - 9\pi x^2$

Les rapports de surface de chaque anneau au cercle interne sont donc de $\frac{7}{9}$ et 1, respectivement.

N.B.: Problème résolu également par Lise St-Pierre.

b. Si le rapport des aires entre 2 cercles est k, le rapport entre leurs rayons sera toujours $\sqrt{k}$

Ici, le 2e cercle a comme aire:

$$\pi r_2^2 = 2\pi r_1^2$$

D'où, $r_2 = \sqrt{2r_1}$

Pour le 4e cercle, on a: $\pi r_4^2 = 4\pi r_1^2$

D'où, $r_4 = 2r_1 = \sqrt{2r_2}$

Remarque: On n'a pas besoin de r_3 et r_5 ici.

N.B. Résolu également par Lise St-Pierre.

Problème 74: Un carré magique (Charles-E. Jean)

Un carré magique est composé de nombres qui sont disposés dans une grille carrée de telle manière que, sur chaque ligne, chaque colonne et sur chacune des deux diagonales principales, la somme des nombres est identique. Cette somme est appelée densité du carré magique.

19	90	

Compléter la grille ci-dessus avec des entiers positifs pour obtenir un carré magique dont la densité est la plus petite possible.

Solution proposée par Charles-E. Jean

La densité d'un carré magique d'ordre 3, composé d'entiers, est un multiple de 3. Le plus petit entier qui peut apparaître sur la troisième ligne est 2.

On aura alors $19 + 90 + 2 = 111$.

Le médian, étant le tiers de la densité, est égal à 37. La somme des nombres de la deuxième colonne est supérieure à 111. Il faut donc rejeter 2.

En complétant la troisième ligne successivement avec les nombres de la suite 2, 5, 8, 11, 14, 17, ... on finira par obtenir un entier positif comme premier nombre de la deuxième colonne. Ce plus petit entier donnera une densité la plus petite possible.

Le carré magique est:

63	2	73
56	46	36
19	90	29

Problème 75: Dénombrement de rectangles (Charles-E. Jean)

Déterminer le nombre de rectangles possibles différents mesurant 12 centimètres sur 15 centimètres dans une grille rectangulaire de 50 centimètres sur 60 centimètres, formée de petits carrés égtaux d'un centimètre de côté. Le périmètre des rectangles obtenus doit coïncider avec les droites tracées et ceux-ci peuvent empièter sur d'autres rectangles. Deux rectangles tracés sont donc différents si au moins un petit carré n'appartient pas aux deux.

Solution proposée par Charles-E. Jean

Soit une grille dont la largeur mesure 50 cm et la longueur, 60 cm.

Traçons des rectangles de 12 cm de largeur et de 15 cm de longueur dans la partie supérieure de la grille ayant 12 cm de largeur. Nous obtenons 46 rectangles.

Traçons des rectangles de 12 cm de largeur et de 15 cm de longueur dans la partie de gauche ayant 15 cm de longueur. Nous en obtenons 39.

Nous aurons donc $46 \times 36 = 1794$ rectangles.

Faisons le même travail avec des rectangles de 12 cm de longueur et de 15 cm de largeur. Nous obtenons 49 rectangles dans la partie supérieure ayant une largeur de 15 cm et 36 dans la partie de gauche ayant une longueur de 12 cm.

Nous aurons donc $49 \times 36 = 1764$ rectangles.

Le nombre total est de $1794 + 1764 = 3558$.

Nouveaux jeux et problèmes

Problème 76: un problème d'Apollonius!

Trouver toutes les situations différentes dans lesquelles un cercle est tangent à chacun des trois autres cercles donnés.

Problème 77: encore le carré!

A. Partager un carré en quatre figures congrues de façon que l'on ait:
   a. Des triangles isocèles rectangles
   b. Des rectangles
   c. Des quadrilatères quelconques cycliques
   d. Des figures limitées par deux segments de droite et deux demi-cercles.
   e. Des figures en forme de T majuscule
   f. Des figures en forme de L majuscule

B. Trouver d'autres types de partage original du carré.

Problème 78: un test pour les nombres!

Trouver une règle de divisibilité par 7.

Veuillez envoyer vos suggestions et commentaires à:

Jean-Marie Labrie
1431, rue Gauvin
Sherbrooke J1K 2J2

Jean-Marie-Labrie
Université de Sherbrooke

Enseignantes et enseignants recherchés

L'équipe de recherche du CIRADE explore le développement des habiletés mathématiques par le biais du développement d'habiletés spatiales. L'équipe est à la recherche d'enseignantes ou d'enseignants du secondaire intéressés à collaborer à cette investigation (automne 1990 et hiver 1991). Les personnes intéressées peuvent contacter Richard Pallascio au CIRADE, UQAM, C.P. 8888 Succ. A, Montréal H3C 3P8, tél.: (514) 987-8560.