Rubrique:

Jeux et problèmes

par Jean-Marie Labrie

Cette chronique qui dure depuis plus de sept ans intéresse de plus en plus d'adeptes. Nous recevons régulièrement des solutions aux problèmes proposés et de nouveaux problèmes que nous sommes heureux d'insérer dans ces pages. Nous félicitons et remercions en particulier François Dubeau, Maurice Brisebois et Charles-E. Jean pour leur collaboration précieuse et bien appréciée.

PROBLÈME 67 (Bull. AMQ, déc. 1989)

a. Nous savons que $1+3+5+7=16$ ou 4^2. Trouver d'autres ensembles formés de 4 nombres impairs consécutifs dont la somme est un carré parfait.

b. Peut-on former des ensembles de 4 nombres pairs consécutifs dont la somme est également un carré parfait? Si oui, comment?

c. Pourquoi la somme de 4 nombres naturels consécutifs ne donne-t-elle pas un carré parfait?

d. Montrer que si la somme des 4 premiers termes d'une progression arithmétique est un carré (m^2), alors la raison et la valeur de m sont des nombres pairs.

e. Trouver une progression arithmétique dont la raison est 4 et dont la somme des 4 premiers termes est 324.

Solution proposée par Charles-E. Jean

A. Posons n le premier entier impair
m le carré parfait

On aura: $n+n+2+n+4+n+6=m$
$4(n+3)=m$

Puisque 4 est un carré parfait, il faut que $n+3$ soit également un carré parfait. Comme n est impair, $n+3$ est pair. Nous pourrons trouver d'autres ensembles en donnant à $n+3$ toutes les valeurs correspondantes à un carré parfait pair.

$n+3=16$ $n=13$ $13+15+17+19=64=8^2$
$n+3=36$ $n=33$ $33+35+37+39=144=12^2$
$n+3=64$ $n=61$ $61+63+65+67=256=16^2$

Le premier nombre de chaque ensemble est égal à $4p^2-3$ où p est un entier positif.

B. Posons n le premier entier pair
m le carré parfait
$4(n+3)=m$

Contrairement au premier cas, il faut donner à $n+3$ toutes les valeurs correspondantes à un carré parfait impair.

$n+3=9$ $n=6$ $6+8+10+12=36=6^2$
$n+3=25$ $n=22$ $22+24+26+28=100=10^2$
$n+3=49$ $n=46$ $46+18+50+52=196=14^2$

Le premier nombre de chaque ensemble est égal à $4p^2+4p-2$ où p est un entier positif.

C. Posons n le premier nombre naturel
s la somme

On aura: $s=n+n+1+n+2+n+3$
$s=2\ (2n+3)$

Si n est pair, $2n+3$ est impair.
Si n est impair, $2n+3$ est impair.

Le double d'un nombre impair n'est jamais un carré parfait.

D. Posons n le premier nombre naturel
r_2 la raison
m^2 la somme

On aura: $m^2=n+n+5+n+2r+n+3r$
$m^2=2\ (2n+3r)$

Pour que $2(2n+3r)$ soit un carré parfait, il faut que $2n+3r$ soit pair. Or, $2n+3r$ est pair seulement si r est pair. Il faut donc que r soit pair.

Par ailleurs, $m^2=2(2n+3r)$ est pair. Donc, m est pair.

E. La progression est: 75, 79, 83, 87, ...

PROBLÈME 68 (Bull. AMQ, déc. 1989)

Un découpage précis!

Quel est le nombre maximum de morceaux de papier rectangulaire 3×5 qui peuvent être coupés à partir d'une feuille rectangulaire mesurant 17 sur 22?

Solutions suggérées de Maurice Brisebois

J'ai reformulé ce problème de la manière suivante: quel est le nombre *m* de tuiles rectangulaires de dimensions 3 par 5 qu'on doit utiliser afin de recouvrir la plus grande partie possible de la surface d'un plancher rectangulaire de dimensions 17×22. Comme $17\times22=374=24\times15+14$, le nombre maximum de telles tuiles est égal à 24; on ignore cependant pour l'instant si on peut disposer les tuiles de telle manière qu'on puisse laisser seulement 14 carrés unitaires non recouverts.

J'ai construit plusieurs solutions, pour lesquelles $m=24$ et j'en donne quatre représentations ci-contre (fig. 1 à 4). Ces solutions, dites optimales, ont toutes été obtenues en recouvrant d'abord la bordure du plancher. Supposons que le côté le plus long de ce plancher est placé à l'horizontale. En résolvant séparément les équations $3x+5y=17$ et $3x+5y=22$, on obtient les solutions entières $x=4$, $y=1$ et $x=4$, $y=2$. Il semble qu'on peut alors générer des solutions optimales en partitionnant les côtés verticaux du plancher en quatre parties de longueur 3 et une de longueur 5 et en partitionnant les côtés horizontaux en quatre parties de longueur 3 et deux de longueur 5.

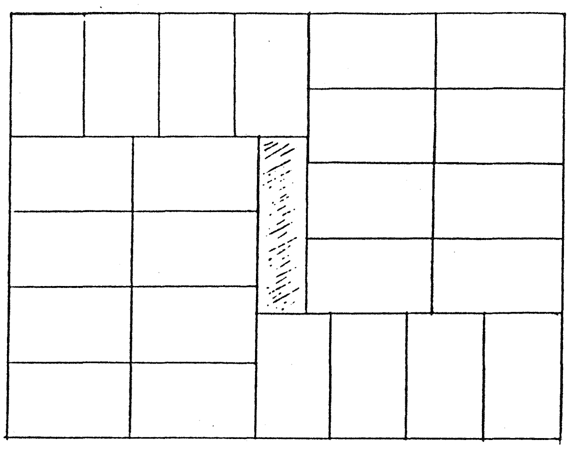


Fig. 1: le poteau

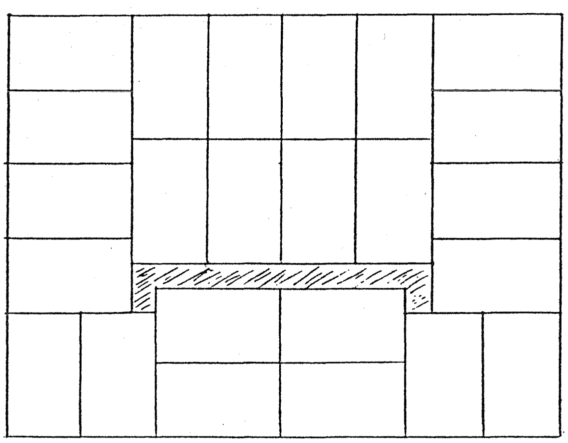


Fig. 2: le banc

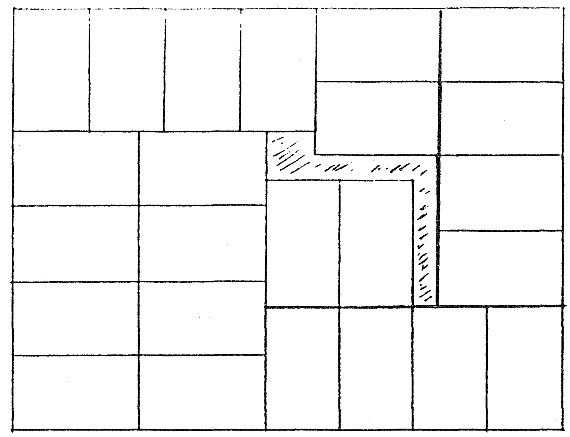


Fig. 3: le dalot

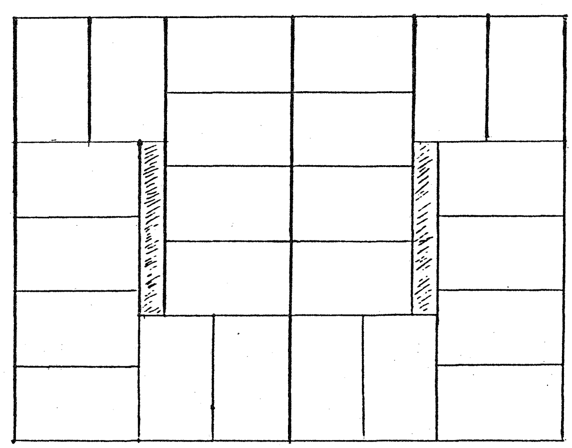


Fig. 4: le chemin

Une autre approche me semble intéressante. Il s'agit de choisir séquentiellement une suite de sous-rectangles de dimensions $A_i \times B_i$, où 3 divise A_i et 5 divise B_i de manière à ce que chacun soit exactement recouvrable par des pavés de dimensions 3×5 et que la partie du rectangle non recouvrable par ces pavés ait une aire égale à 374 mod 15. On part par exemple du coin nord-ouest et on «balaie» le rectangle initial dans le sens des aiguilles d'une montre en construisant des sous-rectangles dont deux des côtés sont confondus avec la frontière du rectangle initial. À chaque étape A_i, B_i sont choisis supérieurs ou égaux à max (a, b) afin d'éviter l'isolement de carrés unitaires qui ne seraient plus ainsi recouvrables. La figure 5 ci-contre montre une solution optimale obtenue par cette approche. Cette solution diffère de celles que j'ai obtenues par la première approche. Je ne peux malheureusement donner une description formelle de cet algorithme et je ne peux non plus donner une condition suffisante pour obtenir une solution optimale. En passant, la construction de la solution dite «du poteau» peut être obtenue en posant $A_1=5$, $B_1=12$; $A_2=12$, $B_2=10$; $A_3=5$, $B_3=9$; $A_4=5$, $B_4=3$; $A_5=12$, $B_5=10$.

Une dernière remarque. Le problème qui nous occupe est relié à celui de l'obtention du p.g.c.d. de deux nombres

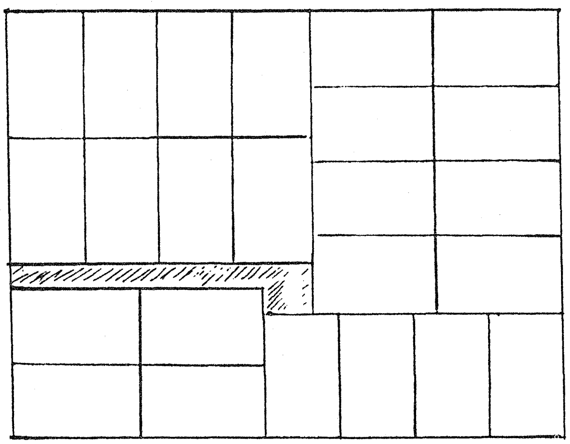
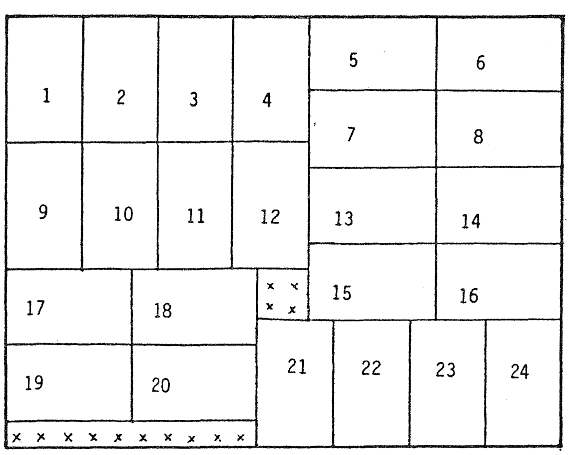


Fig. 5: la bouche d'aération

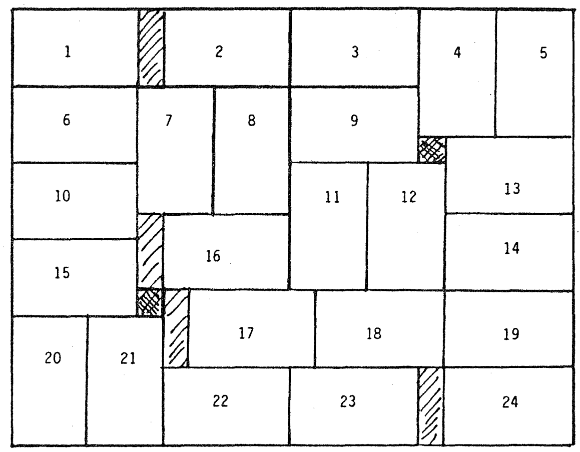
entiers. Si A, B dénotent deux entiers positifs quelconques, et si le p.g.c.d. de (A, B) s'écrit dans la forme $p_1\, p_2$ où p_1 divise A et p_2 divise B, alors le rectangle de dimensions $A \times B$ peut être entièrement recouvert par des pavés rectangulaires de dimensions $p_1 \times p_2$. Remarquons en passant que le p.p.c.m. de A, B peut s'interpréter comme la longueur du côté du plus petit carré admettant le rectangle de dimensions $A \times B$ comme pavé de recouvrement.

<u>**Autre solution du problème 68**</u> proposée par Charles-E. Jean.

Cette solution ressemble à la figure 5 proposée par Maurice Brisebois. Il suffit de déplacer le petit carré 2 sur 2.



Finalement, la solution Patricia Houde présente une certaine symétrie malgré une certaine dispersion des noirs.



PROBLÈME 72

Il existe beaucoup d'activités sur les polyominos. On connaît le nombre de dominos, de trominos, de tétrominos, de pentominos, d'hexominos. Il existe une table qui va jusqu'à 10.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de polyominos	1	1	2	5	12	35	107	363	1 248	4 271

Existe-t-il une formule pour trouver le nombre de figures que l'on peut former avec 11 petits carrés?

Construire un rectangle à partir des 12 pentominos.

<u>**Solutions suggérées**</u>

Jusqu'à maintenant, aucune formule n'a été trouvée!

Voici deux situations de rectangle formé à partir des 12 pentominos:

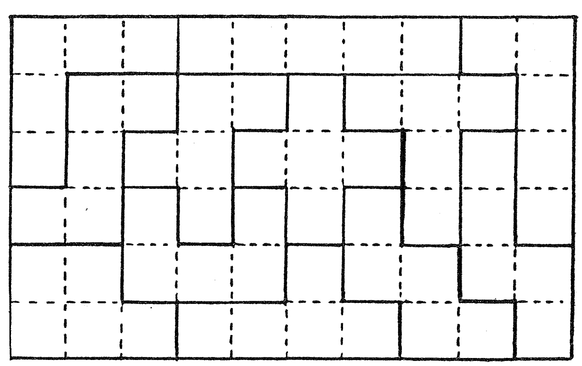


Fig. 1: rectangle 6 sur 10

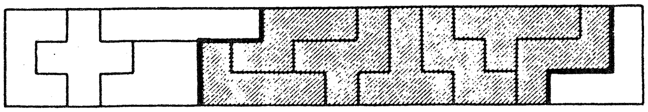


Fig. II: rectangle 3 sur 20

N.B.: La solution du problème 73 sera donnée dans le prochain numéro du Bulletin AMQ.

PROBLÈME 71 (proposé par François Dubeau)

Soit $\vec{x} = (x_i, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Déterminer la valeur maximale et la (les) solution(s) optimale(s) des programmes mathématiques suivants:

a) $V_n^a(\vec{x}) = x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-i}x_n + x_nx_i$,

b) $V_n^b(\vec{x}) = x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-i}x_n$,

sous les contraintes $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 1$,

$x_1 > 0$, $x_2 >, 0, \cdots, x_n > 0$.

<u>Solution proposée</u> **(F. Dubeau)**

Solution. Introduisons les notations suivantes

$s_n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1, x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0\}$,

$S_n^o = \{\vec{x} \in S_n \mid x_1 > 0, x_2 > 0, \cdots, x_n > 0\}$

et

$\partial S_n = \{\vec{x} \in S_n \mid$ il existe un indice i pour lequel $x_i = 0\}$.

Ainsi $\partial S_n = S_n \setminus S_n^o$, $S_n^o \cap \partial S_n = \phi$ et $S_n^o \cup \partial S_n = S_n$

(en fait S_n^o est l'intérieur relatif de S_n et ∂S_n est la frontière relative de S_n).

Comme chacune des fonctions $V_n(\cdot)$ considérées ici est continue sur S_n et que S_n est compact (fermé et borné de R^n), le maximum de $V_n(\cdot)$ est atteint sur S_n, et plus spécifiquement sur S^o ou sur ∂S_n.

<u>**Solution de la partie (a):**</u> Pour n=2 et n=3, nous pouvons utiliser la solution du problème 57 (Bulletin de l'AMQ, octobre 1989, p. 21) et obtenir

$$V_n^a(\vec{x}) = \frac{1}{n-1} \quad [1 - \|x\|^2] \leqslant \frac{1}{n}$$

où $\|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, et le maximum $\frac{1}{n}$ est atteint en $\vec{x}^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $\vec{x}^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ pour n=2 et n=3 respectivement.

Pour n=4, nous avons $V_4^a(\vec{x}) = \frac{1}{2} V_2^a(\vec{\xi})$ où $\vec{\xi} = (x_1 + x_3, x_2 + x_4)$.

Ainsi le maximum est $\frac{1}{4}$ pour $x_1^* + x_3^* = \frac{1}{2}$, $x_2^* + x_4^* = \frac{1}{2}$ et $x_i^* \geqslant 0$ (i=1,2,3,4).

Pour n>4, examinons séparément ce qui se passe à l'intérieur S_n^o et sur la frontière ∂S_n. À l'intérieur de S_n, nous pouvons utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Dans ce cas, une solution optimale doit être solution des (n+1) équations suivantes:

$$\begin{cases} x_{i-1} + x_{i+1} - \lambda = 0, \ i = 1, \cdots, n, \\ x_i + x_2 + \cdots + x_n = 1, \end{cases}$$

(ici $x_o \equiv x_n$ et $x_{n+1} \equiv x_1$). Mais alors, d'une part en additionnant les n premières équations et, en utilisant la dernière, nous obtenons $2 - n\lambda = 0$, et d'autre part, en multipliant la i[e] équation par x_i pour $i = 1, \cdots, n$, en additionnant les n nouvelles équations et, en utilisant la dernière, nous obtenons $2V_n^a(\vec{x}) - \lambda = 0$. Ainsi, si $\vec{x}^*$ est une solution optimale dans S_n^o on a $V_n^a(\vec{x}^*) = 1/n < 1/4$ (car $n > 4$). Sur la frontière ∂S_n supposons que $x_n = 0$, ainsi $V_n^a(\vec{x}) = V_{n-1}^a(\vec{x}) - x_{n-1}x_i \leqslant \max_{\vec{\xi} \in S_{n-1}} V_{n-1}^a(\vec{\xi})$ où $\vec{\xi} = (x_1, \cdots, x_{n-1})$, et si on suppose qu'il existe des solutions optimales de $V_{n-1}(\cdot)$ avec $x_{n-1} = 0$ ou $x_1 = 0$, nous avons alors

$$\max_{\vec{x} \in \partial S_n} V_n^a(\vec{x}) = \max_{\vec{x} \in S_{n-1}} V_{n-1}^a(\vec{x}).$$

Mais comme pour n=4, il existe des solutions optimales de $V_4(\cdot)$ avec $x_1 = 0$ où $x_4 = 0$, on obtient alors le résultat suivant par induction.

«La valeur maximale de $V_n^a(\vec{x}) = x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_1$ sous les contraintes que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$, $x_i \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0$ et $n > 4$ est 1/4, et pour chaque solution optimale $\vec{x}^*$ il existe un indice i tel que

$x_i^* = 1/2$, $x^*_{i-1} + x^*_{i+1} = 1/2$ et $x_j^* = 0$ pour $j \neq i-1$, i, i + 1 (où $x_o \equiv x_n$ et $x_{n+1} \equiv x_i)^n$.

Solution de la partie (b): Pour $n=2$, nous avons $V_2^b(x) = \frac{1}{2} V_2^a(\overrightarrow{x})$, et le maximum est 1/4 pour $\overrightarrow{x}^* = (1/2, 1/2)$. Pour $n=3$, nous avons $V_3^b(\overrightarrow{x}) = x_2(x_1+x_3)$ et le maximum est 1/4 pour $x_2^* = 1/2$ et $x_1^* + x_3^* = 1/2$.
De plus, comme $V_n^b(\overrightarrow{x}) = V_n^a(\overrightarrow{x}) - x_n x_1$, nous déduisons de la partie (a) le résultat suivant:

«La valeur maximale de $V_n^b(\overrightarrow{x}) = x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$ sous les contraintes $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1, x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0$ et $n \geqslant 2$ est 1/4 et, pour chaque solution optimale x^*, il existe un indice i tel que

$$x_i^* = \frac{1}{2} \text{ et } \begin{cases} x_{i+1}^* = \frac{1}{2},\ x_j^* = 0 \text{ pour } j \neq i,\ i+1 \text{ si } i=1, \\ x_{i-1}^* + x_{i+1}^* = \frac{1}{2},\ x_j^* = 0 \text{ pour } j \neq i-1,\ i,\ i+1, \\ \qquad \text{si } i = 2, 3, \cdots, n-1, \\ x_{i-1}^* = \frac{1}{2},\ x_j^* = 0 \text{ pour } j \neq i-1,\ i, \text{ si } i=n\text{».} \end{cases}$$

Nouveaux problèmes

Problème 74: Un carré magique (Charles-E. Jean)

Un carré magique est composé de nombres qui sont disposés dans une grille carrée de telle manière que, sur chaque ligne, chaque colonne et sur chacune des deux diagonales principales, la somme des nombres est identique. Cette somme est appelée densité du carré magique.

19	90	

Compléter la grille ci-dessus avec des entiers positifs pour obtenir un carré magique dont la densité est la plus petite possible.

Problème 75: Dénombrement de rectangles (Charles-E. Jean)

Déterminer le nombre de rectangles possibles différents mesurant 12 centimètres sur 15 centimètres dans une grille rectangulaire de 50 centimètres sur 60 centimètres, formée de petits carrés égaux d'un centimètre de côté. Le périmètre des rectangles obtenus doit coïncider avec les droites tracées et ceux-ci peuvent empièter sur d'autres rectangles. Deux rectangles tracés sont donc différents si au moins un petit carré n'appartient pas aux deux.

Jean-Marie Labrie
Université de Sherbrooke
Adresse: 1431, rue Gauvin
Sherbrooke J1K 2J2

33e congrès de l'A.M.Q.
19, 20 et 21 octobre 1990 Sherbrooke

Les lecteurs et lectrices devront noter que le dépliant contenant la liste des ateliers et des conférences, ainsi que le formulaire d'inscription, sera expédié par lot dans les divers commissions scolaires, collèges et universités vers la fin d'août 1990. Ceux et celles qui désireraient en obtenir une copie personnelle n'ont qu'à expédier le coupon-réponse ci-dessous à l'adresse ci-dessus.

Je désirerais obtenir une copie du dépliant du congrès.
Nom: ______________________
Prénom: ______________________
Adresse: ______________________
____
Institution: ______________________
____

Comité d'organisation du 33e congrès de l'A.M.Q.
Département de mathématique
Collège de Sherbrooke
475 Parc
Sherbrooke J1H 5M7
(819) 564-6319