Concours de l'Association mathématique du Québec 1990
(niveau collégial)

Questions et solutions

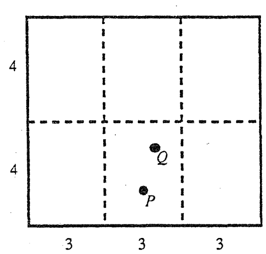
Question 1 *(Les 7 personnes sur le terrain)*

Un nouveau sport se joue à 2 équipes de 3 joueurs chacune sur un terrain rectangulaire dont les dimensions sont de 8 mètres par 9 mètres. Tous les joueurs ainsi qu'un arbitre sont en permanence sur le terrain. Montrer qu'à tout moment du jeu, il existe au moins deux de ces 7 personnes qui sont séparées par une distance n'excédant pas 5 mètres.

Solution proposée

Divisons le terrain en 6 «petits» rectangles égaux de dimensions 4×3 chacun (voir figure). Comme il y a 7 personnes sur le terrain, au moins un des petits rectangles contiendra au moins 2 personnes, disons P et *Q.* On obtient alors

distance $(P,Q) \leq$ diagonale du petit rectangle $= \sqrt{4^2+3^2} = 5.$



Question 2 *(La somme qui divise)*

Démontrer que pour tout choix de trois nombres entiers non négatifs x, y, z, l'énoncé suivant est vrai: Si $x+y+z$ divise xyz alors $x+y+z$ divise $x^3+y^3+z^3$.
[*Rappel:* On dit qu'un entier m divise un entier n lorsqu'il existe un entier q tel que $n=mq$.]

Solution proposée

Par hypothèse, il existe un entier q tel que
$$xyz = (x+y+z)q. \qquad (1)$$

Tentons de trouver un entier Q tel que
$$x^2+y^3+z^3=(x+y+z)Q. \qquad (2)$$

Considérons pour le moment x, y, z comme des variables formelles. À cause de la symétrie, on est amené à chercher un polynôme du second degré effectuant la factorisation.

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2+axy+ayz+azx) \qquad (3)$$

pour un choix «astucieux» de la constante a. Ceci est en fait *impossible* puisque (3) se réécrit

$$x^3+y^3+z^3=x^3+y^3+z^3+(1+a)$$
$$(xy^2+x^2y+yz^2+y^2z+zx^2+z^2x)+3axyz$$

et qu'il faudrait que $0+a=-1$ pour satisfaire formellement cette égalité. Cependant, le choix $a=-1$ simplifie grandement le membre de droite. On obtient en fait l'identité

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$$

Ainsi, tenant compte de (1), on obtient (2) avec l'entier $Q=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx+3q$.

Question 3 *(De la monnaie pour 10$)*

De combien de façons différentes peut-on rendre la monnaie de 10$ en utilisant seulement des pièces de 5¢, 10¢ et 25¢?

[*Note:* Le problème est équivalent au suivant: déterminer le nombre de solutions entières ≥ 0 de l'équation $5x+10y+25z=1000$.]

Solution proposée

En divisant par 5 les deux membres de l'équation $5x+10y+25z=1000$ on obtient l'équation équivalente
$$x+2y+5z=200 \qquad (1)$$

dont il faut trouver le nombre N de solutions (x, y, z) où x, y, z sont des entiers ≥ 0.
Dénombrons ces solutions selon les valeurs possibles pour z données par $z=0, 1, 2, \cdots, 19, 20$. On trouve

$$N=\#\mathrm{sol}\{x+2y=200\}+\#\mathrm{sol}\{x+2y=195\}$$
$$+\#\{\mathrm{sol}\ x+2y=190\}+\cdots \qquad (2)$$

Mais il est facile de voir que
$$\#\mathrm{sol}\{x+2y=n\}=[\tfrac{n}{2}]+1 \qquad (3)$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x (i.e. le plus grand nombre entier n'excédant pas x). En effet, y ne peut prendre que les valeurs $y=0,1,2,\cdots,[n/2]$ et $x\geq 0$ est uniquement déterminé pour chaque choix de valeur pour y. Ainsi, par (2) et (3), on peut écrire

$$N=([200/2]+1)+([195/2]+1)+([190/2]+1)$$
$$+\cdots+([10/2]+1)+([15/2]+1)+([10/2]+1)$$
$$=(101+98+96+93+91+88+86+\cdots+8+6+3+1)$$
$$=(101+96+91+86+\cdots+6+1)+$$
$$(98+93+88+83+\cdots+8+3)$$

$= $(somme d'une progression arithmétique) $+$ (somme d'une progression arithmétique)

$= (21 \cdot 102)/2 + (20 \cdot 101)/2 \; = \; 1071 + 1010 \; = \; \mathbf{2081.}$

Question 4 *(Le monument or et argent devant la banque)*

Une banque décide de rehausser sa façade en plaçant au sol, devant son entrée, un monument formé de 3 boules dorées et d'une boule argentée. Ces 4 boules sont pleines et tangentes deux à deux de façon à constituer une sorte de «pyramide» dont la «base», formée des 3 boules dorées est surmontée de la boule argentée.

Sachant que le rayon de chaque boule dorée est de 1 mètre et que celui de la boule argentée est de 2 mètres, détermniner la hauteur du monument.

Solution proposée

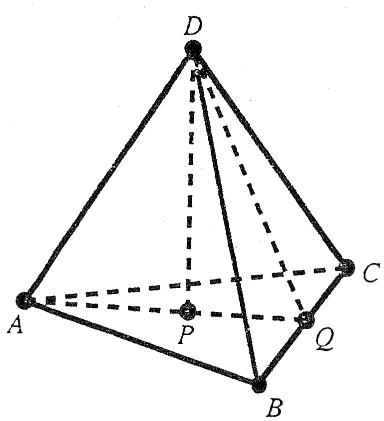
Soient A, B, C les centres des 3 boules dorées placées au sol et D le centre de la boule argentée. Soit Q le point de contact des boules dorées de centres B et C. Bien entendu,

$$BQ = QC = \text{rayon d'une boule dorée} = 1 \qquad (1)$$

et

$$DA = DB = DC = \text{rayon de la boule argentée} = \text{rayon d'une boule dorée} = 3. \qquad (2)$$

De plus, $DQ \perp BC$. Abaissons finalement la perpendiculaire DP sur AQ (voir figure).



Comme P est à 1 mètre du sol ($=$rayon d'une boule dorée) et que D est à 2 mètres du sommet du monument ($=$rayon de la boule argentée) on obtient

$$\text{hauteur du monument} = 1 + DP + 2 = 3 + DP. \qquad (3)$$

On a alors, par le théorème de Pythagore,

$$DP^2 = DQ^2 - PQ^2 = (DC^2 - QC^2) - PQ^2 = (9-1) - PQ^2 = 8 - PQ^2. \qquad (4)$$

Or le triangle ABC est équilatéral de côté 2. Sa hauteur AQ est donc donnée par $\sqrt{3}$. Ainsi,

$$PQ = \frac{1}{3} AQ = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad . \qquad (5)$$

Substituant (5) dans (4) on obtient

$$DP^2 = 8 - \frac{1}{3} = \frac{23}{3}. \qquad (6)$$

Ainsi, à cause de (3), la hauteur du monument est donnée par

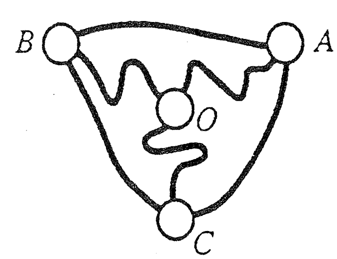
$$\text{hauteur du monument} = 3 + \sqrt{\frac{23}{3}} = 3 + \frac{1}{3}\sqrt{69} = 5{,}7688746\ldots \;.$$

Question 5 *(Le réseau de chemins)*

Quatre villages O, A, B, C sont reliés deux-à-deux par des chemins d'un kilomètre chacun (voir figure). Demain s'annonce une belle journée. Les époux Oscar et Odette, qui habitent le village O, décident qu'ils profiteront du beau temps en faisant k kilomètres sur ce réseau de chemins de la façon originale suivante: Ils partiront à pieds de leur domicile tôt demain matin et parcoureront le réseau tout-à-fait au hasard en empruntant, à chaque village rencontré, l'un des chemins le reliant aux trois autres villages avec une chance sur trois. Au terme de leur parcours, ils conviennent qu'ils dormiront dans le village où ils seront rendus.

Montrer que la probabilité qu'ils dormiront dans leur village O est donnée, en fonction de k, par la formule

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^k.$$



[*Note:* Il faut tenir compte seulement des kilomètres parcourus *sur* le réseau de chemins en laissant tomber ceux qui sont parcourus *à l'intérieur* des villages.]

Solution proposée

Soit p_k la probabilité d'être O après k kilomètres. Il faut montrer que, pour tout $k \geq 0$.

$$p_k = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^k. \tag{1}$$

Il est facile de voir que (1) est satisfaite pour $k=0$ et $k=1$. Pour les valeurs de $k \geq 2$, cherchons une récurrence satisfaite par p_k. Posons à cet effet,

q_k = prob [être en A après k km] = prob [être en B après k km] = prob [être en C après k km].

Alors, par des raisonnements probabilistes élémentaires, on trouve

p_k = prob [être en O après k km]
= prob [(être en A après $k-1$ km) et (avoir emprunté le chemin AO pour le $k^{\text{ième}}$ km)]
+ prob [(être en B après $k-1$ km) et (avoir emprunté le chemin BO pour le $k^{\text{ième}}$ km)]
+ prob [(être en C après $k-1$ km) et (avoir emprunté le chemin CO pour le $k^{\text{ième}}$ km)]
$= q_{k-1}\cdot(1/3) + q_{k-1}\cdot(1/3) + q_{k-1}\cdot(1/3) = q_{k-1}$..

En résumé,

Des raisonnements analogues montrent que

$$p_k = q_{k-1}. \tag{2}$$

q_k = prob[être en A après k km]
= prob [(être en B après $k-1$ km) et (avoir emprunté le chemin BA pour le $k^{\text{ième}}$ km)]
+ prob [(être en C après $k-1$ km) et (avoir emprunté le chemin CA pour le $k^{\text{ième}}$ km)]
+ prob [(être en O après $k-1$ km) et (avoir emprunté le chemin OA pour le $k^{\text{ième}}$ km)]
$= q_{k-1}\cdot(1/3) + q_{k-1}\cdot(1/3) + p_{k-1}\cdot(1/3)$.

En résumé,

$$q_k = \frac{1}{3}(p_{k-1} + 2q_{k-1}). \tag{3}$$

De (2) et (3) on tire immédiatement la récurrence suivante pour les p_k:

$$p_k = \frac{1}{3}(p_{k-2} + 2p_{k-1}),\ k \geq 2. \tag{4}$$

Il est facile de vérifier que les p_k donnés par (1) satisfont bien cette récurrence.

Question 6 *(Le canon pacifique)*

Pour des raisons tout à fait pacifiques, on a mis au point un canon de précision permettant de lancer un projectile avec une vitesse de départ constante indépendamment de l'angle d'élévation α ($\leq \pi/2$) du tir. À partir d'un point P sur un sol parfaitement plat et horizontal, ce canon lance son projectile selon une trajectoire parabolique qui atteint le sol au point Q.

Des scientifiques s'intéressent au point R de cette trajectoire qui est le plus éloigné du point P. Évidemment, lorsque l'angle α est petit, le point R coïncide avec le point d'arrivée Q sur le sol (voir figure 1). Cependant, lorsque l'angle α est grand, le point R est situé au-dessus du sol (voir figure 2).

Déterminer l'angle d'élévation α_O à partir duquel le point R est situé *au-dessus* du sol.

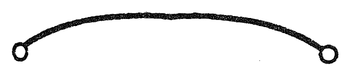


figure 1

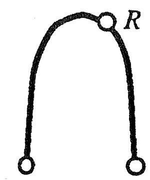


figure 2

[*Note:* La simple donnée d'une expression explicite pour $\sin(\alpha_O)$ ou pour $\cos(\alpha_O)$ sera considérée comme une réponse valable. Négliger la résistance de l'air.]
[*Aide:* S'il n'y avait pas de gravitation, le projectile irait en ligne droite à vitesse constante. Cependant, à cause de la gravitation, la composante verticale de cette trajectoire est diminuée de la quantité $gt^2/2$ au temps t après le départ (où g est la constante dite de gravitation).]

Solution proposée

Soit v la valeur numérique de la vitesse initiale. Les composantes horizontale et verticale du vecteur vitesse initiale sont donc $v \cos \alpha$ et $v \sin \alpha$. S'il n'y avait pas de gravitation, la position du projectile après t secondes serait donnée par ($vt \cos \alpha$, $vt \sin \alpha$) où le point de départ P est, par convention, situé à l'origine des axes de coordonnées. Cependant, à cause de la gravitation, la position du projectile est plutôt donnée par

$$P(t) = (vt \cos \alpha,\ vt \sin \alpha - gt^2/2).$$

En posant $x = vt \cos \alpha$, $y = vt \sin \alpha - gt^2/2$ et éliminant t, on trouve l'équation cartésienne de la trajectoire parabolique:

$$y = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\, x \left(1 - \frac{gx}{2v^2 \sin \alpha \cos \alpha}\right). \tag{2}$$

On en tire immédiatement que $PQ = 2\, v^2 \sin \alpha \cos \alpha / g$. Traçons maintenant, dans le premier quadrant, le quart de la circonférence centrée en P et de rayon PQ. Cette courbe est donnée par

$$x^2 + y^2 = \frac{(2v^2 \sin \alpha \cos \alpha)^2}{g},\quad x \geq 0, y \geq 0. \tag{3}$$

Qualitativement parlant, on a les 3 possibilités (pour la trajectoire et l'arc de cercle) décrites par la figure 1, selon que $\alpha < \alpha_O$, $\alpha = \alpha_O$, $\alpha >_O$:

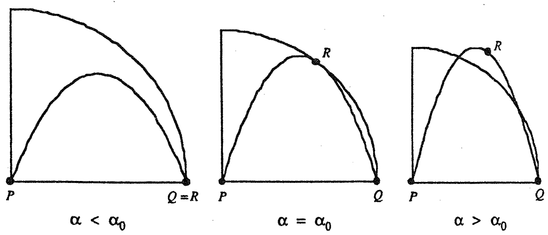


Figure 1

En effectuant un changement d'échelle approprié (*ce qui ne modifie pas les angles!*), on peut toujours supposer que $PQ = 1$. Les équations (2) et (3) s'en trouvent grandement simplifiées et peuvent maintenant s'écrire sous la forme

$$y = m\,x\,(1-x),\ (\text{où } 0 \le x \le 1,\ m = \tan\alpha \ge 0), \tag{4}$$

$$x^2 + y^2 = 1,\ (\text{où } x \ge 0,\ y \ge 0). \tag{5}$$

Pour chaque x tel que $0 \le x \le 1$, posons

$y_1 = y_1(x) = mx(1-x)$ = ordonnée du point d'abscisse x sur la parabole,
$y_2 = y_2(x) = \sqrt{1-x^2}$ = ordonnée du point d'abscisse x sur l'arc du cercle.

Pour éviter les radicaux inutiles, considérons la fonction auxiliaire

$$f(x) = (y_1(x))^2 - (y_2(x))^2 = m^2x^2(1-x)^2 - (1-x^2). \tag{6}$$

La figure 2 décrit le comportement qualitatif du graphe de la fonction f correspondant aux 3 cas cités plus haut.

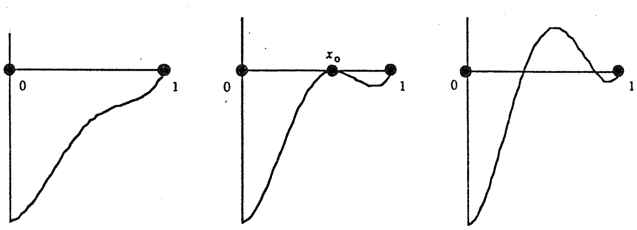


Figure 2

Nous cherchons donc l'*unique* vateur positive $m_0 = \tan\alpha_0$ de m pour laquelle il existe un x_0 satisfaisant $0 < x_0 < 1$, $f(x_0) = 0$ et $f'(x_0) = 0$ (i.e.: tangente horizontale). En d'autres termes, les quantités x_0, m_0 doivent satisfaire les équations et inéquations simultanées

$$m^2x^2(1-x)^2 - (1-x^2) = 0, \tag{7}$$

$$2m^2x(1-x)^2 - 2m^2x^2(1-x) + 2x = 0, \tag{8}$$

$$0 < x < 1,\ m > 0. \tag{9}$$

En multipliant (8) par $x/2$ et soustrayant (7) on arrive à l'égalité

$$m^2 = \frac{1}{x^3(1-x)}. \tag{10}$$

Substituant cette valeur de m^2 dans (7) on obtient, après simplification du facteur $(1-x) = 0$ et multiplication par $x = 0$:

$$1 - x - x^2 = 0. \tag{11}$$

Les deux solutions de cette équation quadratique sont données par $(-1+\sqrt{5})/2$ *et* $(-1-\sqrt{5})/2$. *L'unique choix satisfaisant (9) est*

$$x_0 = \frac{\sqrt{5-1}}{2}. \tag{12}$$

De plus, à cause de (11), on peut écrire $x_0^2 = 1 - x_0$. D'où l'on déduit (utilisant (10)) que

$$m_0^2 = \frac{1}{x_0^5} = \left(\frac{\sqrt{5-1}}{2}\right)^{-5}. \tag{13}$$

Finalement,

$$m_0 = \tan\alpha_0 = \left(\frac{\sqrt{5-1}}{2}\right)^{-5/2}. \tag{14}$$

Note 1: Il est intéressant de remarquer que $(\sqrt{5}-1)/2 = 1/\gamma$ où $\gamma = (\sqrt{5}+1)/2$ est le *nombre d'or* des anciens Grecs. Ainsi, (14) peut s'écrire sous l'une des trois formes équivalentes suivantes:

$$\tan\alpha_O = \gamma^{5/2},$$

$$\cos\alpha_O = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^5}},$$

$$\sin\alpha_O = \frac{\gamma^{5/2}}{\sqrt{1+\gamma^5}}, \tag{15}$$

Ceci correspond à la valeur angulaire $\alpha_O =$ **73.2858755 degrés** approximativement.

Note 2. La valeur de α_O est indépendante de g et de v. Ainsi, elle est la même quelle que soit la planète sur laquelle se situe le canon (pacifique!) et quelle que soit la vitesse initiale du projectile!