Chronique:

Jeux et problèmes

Jean-Marie Labrie

J'utilise cette chronique pour parler de la valise mathématique de l'AMQ. Cette valise existe depuis une quinzaine d'années. Cette valise (2 valises en fait) contient des jeux. Présentement, ces valises sont utilisées par Monsieur Richard Morency, conseiller pédagogique à la Commission scolaire de Charlesbourg. Monsieur Jacques Sormany de Chicoutimi s'est offert de la remettre en ordre et peut-être, en profiter d'organiser quelques ateliers de mathématiques dans sa région. Je remercie Monsieur Sormany de cette initiative.

Monsieur Sormany a signalé une erreur dans le Bulletin AMQ du mois de mai. La solution problème 58 doit être celle-ci:
a) Pages 1 à 9: 9 caractères
b) Pages 10 à 99: $90 \times 2 = 180$ caractères
c) $942 - 189 = 753$ caractères pour les autres pages
d) 753 3 $= 215$ pages
e) Nombre de pages au total: $9 + 90 + 251 = 350$ pages

Il y a donc 942 caractères, au lieu de 2 781 caractères.

Ainsi, un livre de 699 pages requerrait 1 989 caractères pour être paginé.

Solutions proposées

PROBLÈME 64

Monsieur Maurice Brisebois propose le problème suivant: Soit n un entier non négatif quelconque. On demande de déterminer le nombre de solutions de l'équation:
$x + 2y + 2z = n$ où x, y et z sont des entiers non négatifs.

On demande de ne pas utiliser les fonctions génératrices pour obtenir la solution de ce problème.

1) Solution proposée par J. Sormany

n	Nombre de solutions
0	1
1	1
2	3
3	3
4	6
5	6
...	
n	$\dfrac{([\frac{n}{2}] + 1)([\frac{n}{2}] + 2)}{2}$

où $[\frac{n}{2}]$ est la partie entière de $\frac{n}{2}$.

Ce qui donne: $\dfrac{n^2 + 6n + 8}{8}$ pour n pair

$\dfrac{n^2 + 4n + 3}{8}$ pour n impair

N.B. Je n'ai pas de démonstration simple, puisque c'est par tâtonnement que je suis arrivé à la formule; on peut vérifier en comptant les solutions pour «n» quelconque:

1 solution de la forme (n; 0; 0)
2 solutions: (n -2; 1; 0) et (n -2; 0; 1)
3 solutions: (n -4; 2; 0), (n -4; 1; 1) et (n -4; 0; 2)
etc.
$\frac{n}{2} + 1$ solutions: (0 ou 1; $\frac{n}{2}$; 0), ... , (0 ou 1; 0; $\frac{n}{2}$)

NDLR: Les solutions sont des nombres triangulaires: 1,1, 3,3, 6, 6, ...

2) Solution proposée par Maurice Brisebois au problème 64:

Puisque $2(y+z)$ est nécessairement un entier pair, n et x doivent être de même parité. Étudions donc les cas «x, n impairs» et «x, n pairs».

Cas 1: x, n impairs

Dans ce cas on pose $x = 2k + 1$, $n = 2s + 1$ avec $s \geq k$ où k, s sont des entiers non négatifs.

On a donc $2(y+z) = n - x = 2(s-k)$ ce qui entraîne: $y + z = s - k$. Le nombre de solutions entières de cette équation est alors: $s - k + 1$ puisque y peut prendre (tout comme z) toutes les valeurs 0, 1, 2,..., $s - k$. Or les valeurs impaires de x correspondent aux valeurs 0, 1, ..., s de k.

Le nombre total de solutions de l'équation initiale est donc

$\sum_{k=0}^{s} (s-k+1)$ qui vaut $(s+1)^2 - \dfrac{s(s+1)}{2}$

i.e. $\dfrac{(s+1)(s+2)}{2}$ i.e. $\frac{1}{8}(2s+2)(2s+4)$

i.e. $\frac{1}{8}(n+1)(n+3)$.

Cas 2: x, n pairs

Dans ce cas on pose $x = 2s$, $x = 2k$ avec s, k entiers non négatifs. On a encore $y + z = s - k$ comme auparavant et le nombre total de solutions s'écrit encore

$\sum_{k=0}^{s} (s-k+1)$ i.e. $\frac{1}{8}(2s+2)(2s+4)$ i.e.

comme $\frac{1}{8}(n+2)(n+4)$.

Remarque

On peut trouver une solution à ce problème en pages 87 et 88

du livre de K.S. Williams & Kenneth Hardy: *The Red Book: 100 practice problems for undergraduate mathematics competitions,* publié en 1988 par Integer Press, P.O. Box 6613, Station 5, Ottawa, Ontario, K2A 3Y7.

Les auteurs utilisent la méthode des fonctions génératrices et expriment la solution pour le cas «x, n pairs» dans la forme équivalente

$$\frac{n(n+6)}{8} + 1.$$

La solution proposée auparavant m'apparaît plus élémentaire.

3) Solution de Williams & Hardy

Pour $|t| < 1$, nous avons:

$$\sum_{n=0}^{\infty} S(n)t^n = (1+t+t^2+\ldots)\quad(1+t^2+t^4+\ldots)^2$$

$$= \frac{1}{(1+t)^3(1+t)^2}$$

$$= \frac{3/16}{1-t} + \frac{1/4}{(1-t)^2} + \frac{1/4}{(1-t)^3} + \frac{3/16}{1+t} + \frac{1/8}{(1+t)^2}$$

$$= \frac{3}{16}\sum_{n=0}^{\infty} t^n + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n$$

$$+ \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)t^n}{2} + \frac{3}{16}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$$

$$+ \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)t^n$$

$$= \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{\infty}(3+4(n+1)+2(n+1)(n+2)+$$

$$3(-1)^n+2(-1)^n(n+1)t^n.$$

Ce qui donne:

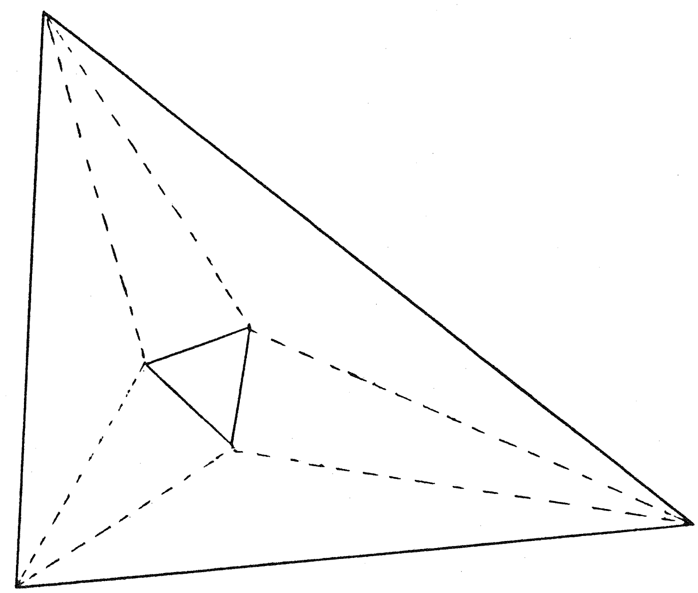
$$S(n) = \begin{cases} \dfrac{n(n+6)}{8} + 1 & \text{si n est pair} \\[2ex] \dfrac{(n+1)(n+3)}{8} & \text{si n est impair} \end{cases}$$

PROBLÈME 65

Comment construire un triangle équilatéral à l'intérieur d'un triangle quelconque?

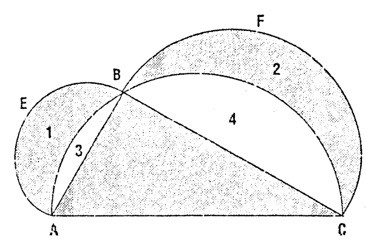
<u>**Solution suggérée**</u> (Théorème de Morley)

Il suffit de diviser chacun des angles d'un triangle en 3 angles congrus (trisection de l'angle). Ce qui donne un triangle équilatéral de la façon suivante:



PROBLÈME 66

Montrez que la somme des aires des lunules construits sur les deux côtés d'un triangle inscrit dans un demi-cercle est égale à l'aire du triangle. (Voir la figure ci-contre).



<u>**Solution proposée par J. Sormany**</u>

Un classique (Hippocrate)

On a: $3+4+5 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{AC}{2}\right)^2$ (Moitié d'un cercle)

$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{BC^2+AB^2}{4}\right)$(Relation de Pythagore)

$= 5 = 1+2$ où 5 est l'aire du triangle ABC.

<u>**Nouveaux jeux et problèmes**</u>

PROBLÈME 67

a. Nous savons que $1+3+5+7=16$ ou 4^2. Trouver d'autres ensembles formés de 4 nombres impairs consécutifs dont la somme est un carré parfait.

b. Peut-on former des ensembles de 4 nombres pairs consécutifs dont la somme est également un carré parfait? Si oui, comment?

c. Pourquoi la somme de 4 nombres naturels consécutifs ne donne-t-elle pas un carré parfait?

d. Montrer que si la somme des 4 premiers termes d'une progression arithmétique est un carré (m^2), alors la raison et la valeur de m sont des nombres pairs.

e. Trouver une progression arithmétique dont la raison est 4 et dont la somme des 4 premiers termes est 324.

PROBLÈME 68

Un découpage précis!

Quel est le nombre maximum de morceaux de papier rectangulaire 3 x 5 qui peuvent être coupés à partir d'une feuille rectangulaire mesurant 17 sur 22?

N.B. Donner une représentation du découpage.

PROBLÈME 69

Vieux problème de fraction!

Le rapport de deux nombres est $\frac{5}{2}$. Si l'on ajoute 18 à chacun de ces nombres, leur rapport devient $\frac{8}{5}$. Quels sont ces nombres?

PROBLÈME 70

Les pentaminos et la symétrie axiale!

Parmi les douze pentaminos, quels sont ceux qui ont au moins un axe de symétrie?

Adresse: Jean-Marie Labrie
1431, rue Gauvin
Sherbrooke J1K 2J2

APAME D'OR

Attribution de prix à des auteurs d'articles parus dans «Instantanés Mathématiques»

Les objectifs poursuivis sont les suivants:
- reconnaître publiquement l'effort fourni par les membres de l'APAME pour la publication de la revue;
- encourager les membres à devenir des auteurs.

PRIX NO 1 - Apame d'or pour le meilleur article

Ce prix est attribué à l'auteur du meilleur article publié dans la revue au cours des deux années écoulées entre deux congrès.

PRIX NO 2 - Apame d'or pour la meilleure série d'articles

Ce prix est attribué à l'auteur de la meilleure chronique ou série d'articles publiés dans la revue au cours des deux années écoulées entre deux congrès.

Cette chronique ou série d'articles devra avoir paru dans au moins 3 des 5 numéros d'une année.

PRIX NO 3 - Apame d'or pour une contribution exceptionnelle à la revue

Ce prix est attribué à un auteur ayant contribué de façon exceptionnelle à l'édition de la revue.

Il est décerné à un auteur pour l'ensemble de sa production sur une période de temps non-limitée.

Formation du jury

Le conseil d'administration nomme un responsable du jury au début de la deuxième année de son mandat.

Ce responsable forme le comité du jury qui commence ses travaux au début de l'année civile du congrès.

Le jury est composé des membres suivants:
- le responsable nommé par le CA;
- un responsable de l'édition de la revue ou du comité de lecture;
- un membre de l'exécutif;
- deux autres membres de l'APAME proposés à l'exécutif par le responsable du jury.

Règles
- Ces prix sont attribués lors du congrès bisannuel.
- L'auteur doit être membre de l'APAME lors de l'attribution du prix.
- Le comité peut ne proposer aucun candidat si aucune production n'a retenu son attention.
- Les membres de jury ne peuvent être mis en nomination.