Chronique:

Jeux et Problèmes

Jean-Marie Labrie

Nous avons reçu deux approches différentes du problème 57 proposé par Monsieur F. Dubeau. Nous remercions les professeurs Maurice Brisebois et Stephen Whitney des solutions suggérées au problème 57. Nous sommes toujours heureux de recevoir vos commentaires, vos suggestions et vos jeux et problèmes. Un merci particulier à Monsieur Maurice Brisebois qui nous a envoyé le problème 64.

PROBLÈME 57 (deuxième fois)

(proposé par F. Dubeau)

Soit $\vec{x} = (x_., \ldots, X_n) \in R^n$. Déterminer la valeur maximale et la (les) solution(s) optimale(s) des programmes mathématiques suivants:

(a) $V_n^a(\vec{x}) = \sum_{i \leq j} x_i\, x_j$

(b) $V_n^b(\vec{x}) = \sum_{i \leq j} x_i,\, x_j$

sous les contraintes $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0, \ldots, X_n \geq 0$.

SOLUTION DU PROBLÈME 57
(Bulletin de l'A.M.Q., mars et mai 1989)

(proposée par Maurice Brisebois, Un. de Sherbrooke)

On peut écrire: $\sum_{i<j} x_i\, x_j = \frac{1}{2} \sum_{i=j} x_i x_j$

$$= \frac{1}{2}((\Sigma\, x_i)^2 - \Sigma\, x_i^2)$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \Sigma\, x_i^2)$$

Comme $\sum_{i \leq j} x_{ij}$ s'écrit aussi $\Sigma\, x_i^2 + \sum_{i<j} x_{ij}$ ou encore comme

$\Sigma\, x_i^2 + \frac{1}{2}(1 - \Sigma\, x_i^2)$ i.e. comme $\frac{1}{2}(1 + \Sigma\, x_i^2)$ il reste à étudier

le comportement de la fonction $\phi\, (x_i, \ldots, x_n) =$

$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ sur $D_\phi = \{x_1, \ldots, x_n\colon \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$

et $x_i \geq 0;\ i = 1, 2, \ldots, n\}$. Or ϕ possède sur D_ϕ un extremum

local en $x_i = \frac{1}{n}$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$; cet extrenum est en fait un minimum local qui est aussi un minimum absolu; comme D_ϕ est borné et fermé, ϕ prend donc sa valeur maximale sur la frontière de D_ϕ et en fait aux points $(x_1, \ldots, x_n)$ dont toutes les composantes sont nulles sauf une qui vaut 1 (n'importe laquelle composante suffit puisque ϕ est invariante par permutation des variables $x_1, \ldots, x_n$).

Ainsi $\max_{D\phi} \sum_{i<j} x_i\, x_j = \frac{1}{2}\ \ 1 - n\, (\frac{1}{n})^2\ \ = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n})$

et $\max_{D\phi} \sum_{i \leq j} x_i\, x_j = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1.$

Remarques:

(1) Apostol dans son livre «Mathematical Analysis» (Addison-Wesley, 1960, page 160, exercice 7.13), note que si

$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1}^{n} x_i^k$ avec la contrainte $\sum_{1}^{n} x_i = a$, alors f

possède un extremum local qui vaut $a^k\, n^{1-k}$. Le cas qui nous intéresse ici est celui pour lequel $k = 2$, $a = 1$.

(2) Chercher un extremum pour $\phi\, (x_1, \ldots, x_n)$ sur D_ϕ consiste donc à chercher l'hypersphère centrée à l'origine qui a un rayon de longueur extrémale tout en coupant la portion de l'hyperplan située dans le "2^n-stant" définie par $(\,(x_1, \ldots, x_n)\colon x_i \geq 0$ pour $i = 1, \ldots, n)$. En prenant $n = 2$, on voit que ϕ possède un maximum absolu en $(1,0)$ ou $(0,1)$ indifféremment et un minimum absolu en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ puisque, dans ce dernier cas, le cercle $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ doit être tangent à la droite $x_1 + x_2 = 1$ en ce point.

AUTRE SOLUTION (proposée par Stephen Whitney, professeur à UQAC)

On veut maximiser $A = \sum_{1<j\leq n} x_i\, x_j$ et $B = \sum_{1<j\leq n} x_i\, x_j$ si $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$,

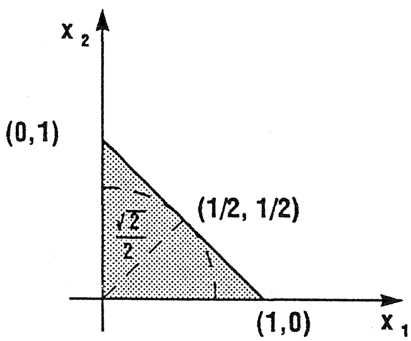
étant donné $x = (x_1, \ldots, x_n)\ R^n$, avec $x_i \geqq 0$.

Notons que $A + B = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_j\, x_i = 1$ et que

$$B - A = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = |x|^2.$$

Ainsi, maximiser $A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}|x|^2$ revient à
minimiser x ou $|x|^2$ et
maximiser $B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|x|^2$ revient à
maximiser x ou $|x|^2$.

Par un diagramme facile généralisable à R^n, on voit que $|x|^2$ est minimisé $(\frac{1}{n})$ si $x_1 = \ldots = x_n = \frac{1}{n}$
et maximisé (1) si x est canonique
(une ligne de la matrice identité).
Remarque. On peut également trouver le minimum par les multiplicateurs de Lagrange:



$$0 = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|x|^2 - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 2x_i - \lambda$$

D'où, $1 = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{2} = \frac{n\lambda}{2}$

Donc, $x_i = \frac{1}{n}$

Finalement, si $x_n = \frac{1}{n}$, alors $A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$ (un maximum)
et $B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$ (un minimum)
et si est canonique, alors

$A = 0$ (minimum) et $B = 1$ (maximum).

PROBLÈME 61

Un alphamétique!

Soit l'opération suivante:

$$\begin{array}{r} ABCD \\ -\ BCDA \\ \hline DCBA \end{array}$$

Si chaque lettre tient la place d'un seul chiffre, trouvez ces chiffres.

Solution proposée par Stephen Whitney

Il faut déchiffrer ABCD = BCDA + DCBA avec
A, B, C et D (0, 1,..., 9).
Dans les milliers, on a $B + D = A$ ou $A - 1$.
Dans les unités, on a $A + A = D$ ou $D + 10$.
1[er] cas: $B + A + A = A$ ou $A - 1$;
ce qui ne donne que $A = B = C = D = 0$.
2[e] cas: Dans les dizaines, on a alors
$B + D = C - 1$ ou $C + 9$.
Ce qui donne 4 cas pour les centaines:
i. $C + C = B$; d'où, $C + C + D = C - 1$; impossible.
ii. $C + C = B + 10$ et $B + D = C - 1$ et $B + D = A - 1$
d'où, $C = A$; $B = D = 2A - 10$
ou encore $4A - 20 = A - 1$; d'où $A = \frac{19}{3}$.
iii. $C + C = B - 1$ et $B + D = C + 9$ et $B + D = A$
d'où, $C + 9 = A$ avec $C = 0$ et
$A = 9$ avec $B = 1$ et $D = 8$.
iv. $C + C = B + 9$ et $B + D = C + 9$ et $B + D = A - 1$
d'où, $C + 10 = A$, ce qui est impossible.

La seule solution (à part 0000 + 0000 = 0000) est donc
9108 = 1089 + 8019

N.B. Les nombres de 4 chiffres sont des multiples de 9.

PROBLÈME 62

Soit une suite de nombres rationnels:

$\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{4}, \frac{27}{5}, \frac{27}{2}$

Quel est le terme suivant de cette suite?

Solution proposée

On peut écrire la suite d'une autre façon:

$\frac{1}{2}, \frac{3}{3}, \frac{9}{4}, \frac{27}{5}, \frac{81}{6}$

Au numérateur, on a la suite des puissances de 3;
au dénominateur, on a la suite: 2, 3, 4, 5, 6,...

Le prochain terme de cette suite est donc: $\frac{243}{7}$.

PROBLÈME 63

Un problème de simplification!

$$\frac{(8 + 2\sqrt{15})^{3/2} + (5 - 2\sqrt{15}) + 3)^{3/2}}{(12 + 2\sqrt{35})^{3/2} - (7 - 2\sqrt{35}) + 5)^{3/2}}$$

Solutions proposée

Il suffit de remarquer que:

$8 + 2\sqrt{15} = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2$

$8 - 2\sqrt{15} = (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$

$12 + 2\sqrt{35} = (\sqrt{7} + \sqrt{5})^2$ et $12 - 2\sqrt{35} =$
$(\sqrt{7} - \sqrt{5})^2$

On peut écrire:

$$\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^3+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^3}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^3-(\sqrt{7}-\sqrt{5})^3}$$

$$\frac{2\,(5\sqrt{5}+9\sqrt{5})}{2\,(21\sqrt{5}+5\sqrt{5})} \quad \text{ou} \quad \frac{7}{13}$$

Autre solution (proposée par S. Whitney)

On veut simplifier $E = \dfrac{r^{3/2}+r^{-3/2}}{s^{3/2}+s^{-3/2}}$

où $r = 8 + 2\sqrt{15}$ et $s = 12 + 2\sqrt{35}$

$\bar{r}$ et $\bar{s}$ sont les conjugués respectifs de r et de s.

On veut exprimer r, $\bar{r}$, s et $\bar{s}$ comme des carrés afin d'éliminer l'exposant $\frac{3}{2}$.

On doit avoir: $(a \pm b\sqrt{15})^2 = a^2 + 15b^2 \pm 2ab\sqrt{15}$

$$= k(8 + 2\sqrt{15}$$

d'où, la solution $a = 3$, $b = 1$ et $k = 3$

Pour l'autre cas, on a:

$$(c \pm d\sqrt{35})^2 = k(12 + 2\sqrt{35})$$

Ce qui donne: $c = 5$, $d = 1$ et $k = 5$

$$\text{Donc, } E = \frac{\sqrt{125}\,(3+\sqrt{15})^3+(3-\sqrt{15})^3}{\sqrt{27}\,(5+\sqrt{35})^3-(5-\sqrt{35})^3}$$

Ensuite, la simplification vient facilement.

N.B. M. Whitney a-t-il trouvé toutes les solutions?

PROBLÈME 64

Monsieur Maurice Brisebois propose le problème suivant: Soit n un entier non négatif quelconque. On demande de déterminer le nombre de solutions de l'équation: $x + 2y + 2z = n$ où x, y et z sont des entiers non négatifs.

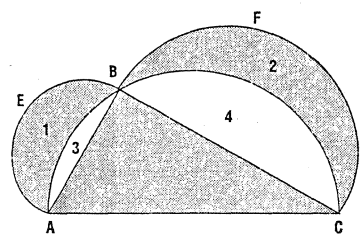
On demande de ne pas utiliser les fonctions génératrices pour obtenir la solution de ce problème.

PROBLÈME 65

Comment construire un triangle équilatéral à l'intérieur d'un triangle quelconque?

PROBLÈME 66

Montrez que la somme des aires des lunules construits sur les deux côtés d'un triangle inscrit dans un demi-cercle est égale à l'aire du triangle. (Voir la figure ci-contre).



Adresse: Jean-Marie Labrie
1431, rue Gauvin
Sherbrooke J1K 2J2