

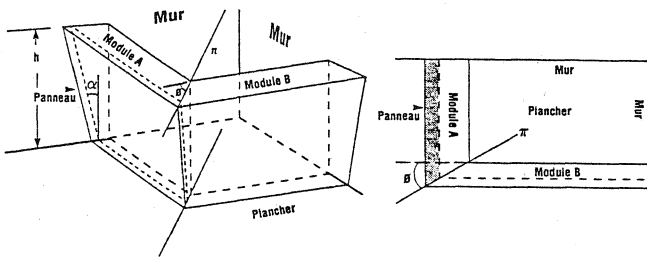
Résumé

Les angles de coupe et les dimensions des panneaux d'un comptoir anguleux sont déterminés à l'aide de notions de trigonométrie et d'algèbre linéaire (rotations de système d'axes et projections sur un plan). Le principal problème rencontré est essentiellement la détermination du rectiligne d'un dièdre.

1. Introduction

L'objet de ce texte est de présenter un exemple d'utilisation de la trigonométrie et de l'algèbre linéaire (rotations et projections) afin de résoudre un problème pratique. Le problème considéré est la taille des panneaux d'un comptoir anguleux tel que celui présenté à la Figure 1.

Figure 1. Comptoir anguleux.



(a) VUE EN PERSPECTIVE DU COMPTOIR. (b) VUE DE DESSUS DU COMPTOIR.

2. Description du problème

Pour construire un comptoir anguleux nous devons couper des panneaux de telle sorte que l'ajustement soit parfait. La Figure 1 illustre un comptoir anguleux simple constitué de deux modules. Ces modules se rencontrent le long d'un plan vertical π et sont perpendiculaires aux murs. La Figure 1.(a) présente en vue en perspective du comptoir où nous avons indiqué l'épaisseur du panneau par un trait pointillé. La Figure 1.(b) présente une vue de dessus du comptoir. Le problème est de déterminer le plan (ou programme) de coupe du panneau spécifié à la Figure 1.

À la Figure 2, nous avons isolé le panneau à couper et indiqué les données du problème. Ces données sont la hauteur h du comptoir, l'angle d'inclinaison α du panneau par rapport à la verticale, l'angle ϕ entre le plan vertical π et tout plan vertical perpendiculaire au panneau (par exemple le mur), et l'épaisseur e du panneau.

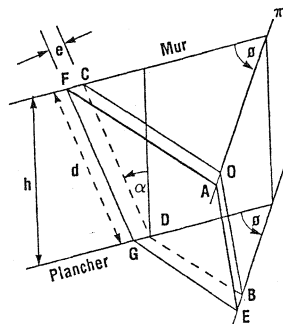
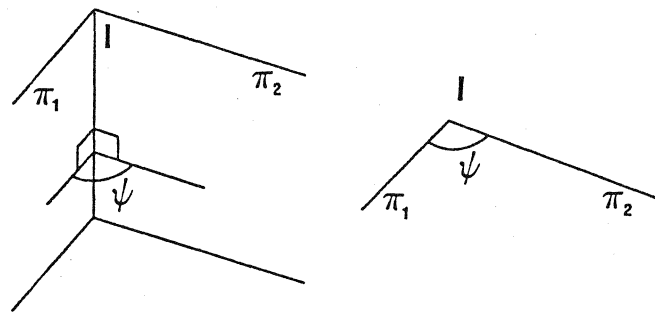


Figure 2. Le panneau et les données.

Le problème est de déterminer le programme de coupe des faces AOCF, EBDG et AOB E.

Rappelons qu'un **dièdre** est la figure formée par deux demi-plans π_1 et π_2 issus d'une même droite, ou **arête**, l et que l'**angle rectiligne**, ou plus simplement le **rectiligne**, est l'angle plan ψ obtenu en coupant les faces du dièdre par un plan perpendiculaire à l'arête l (voir la Figure 3 et Guion [2, pp. 39-41]).

Figure 3. Un dièdre et son rectiligne.



(a) UN DIÈDRE.

(b) VUE DU DIÈDRE SELON LA DROITE D'INTERSECTION l .

Si on revient à la Figure 2, le problème est de déterminer la longueur d de l'arête FG (ou la longueur de l'arête CD, ou la distance entre les arêtes AF et EG, ou encore la distance entre les arêtes OC et BD), ainsi que les angles de coupe des faces AOCF, EBDG et AOB E. Ces angles de coupe sont les rectilignes des dièdres formés des faces

- (i) AOCF et BOCD;
- (ii) EBDG et BOCD;
- (iii) AOB E et BOCD.

3. Une solution

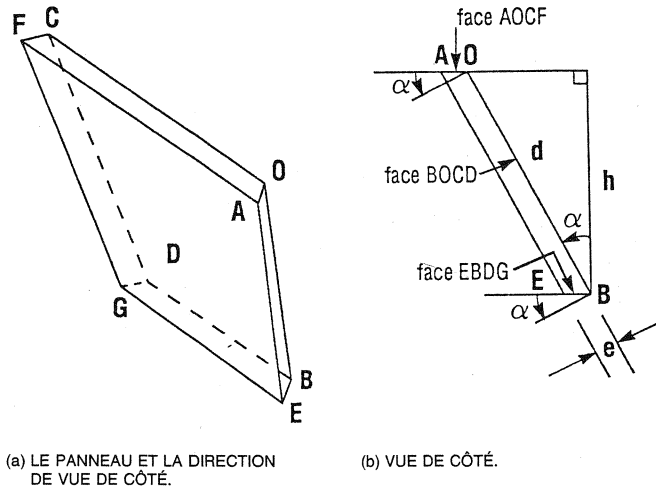
La détermination de d et des rectilignes des dièdres formés des faces (i) AOCF et BOCD, et (ii) EBDG et BOCD se fait par manipulations trigonométriques. La détermination du rectiligne du dièdre formé des faces AOB E et BOCD peut être faite par rotations d'un système d'axes et projection orthogonale sur un plan.

3.1 Programme de coupe des faces AOCF et EBDG

Pour couper les faces AOCF et EBDG, nous devons connaître d et les rectilignes des dièdres formés des faces (i) AOCF et BOCD, et (ii) EBDG et BOCD. En utilisant la vue de côté de la Figure 4b, nous avons

(1)
$$d = h/\cos \alpha$$

Figure 4. Vue de côté du panneau (ou vue le long de l'arête OC, ou BD, ou AF, ou EG).



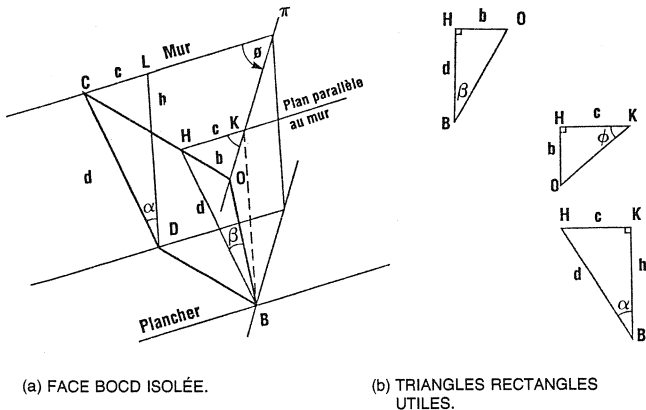
De plus l'angle α détermine complètement les angles de coupe des faces AOFC et EBDG. En effet le rectiligne du dièdre formé des faces AOFC et BOCD est de $90^\circ + \alpha$ et le rectiligne du dièdre fermé des faces EBDG et BOCD est $90^\circ - \alpha$.

3.2 Programme de coupe de la face AOBE

Pour couper la face AOBE, il faut en premier lieu déterminer un angle d'inclinaison β de l'arête OB. Cet angle est indiqué à la Figure 5a où nous avons isolé la face BOCD. L'angle d'inclinaison β est l'angle entre l'arête OB et le segment BH. Ce segment BH est l'intersection de la face BOCD et d'un plan vertical perpendiculaire au panneau et passant par le point B (ici ce plan est parallèle à un mur). Il est alors possible d'obtenir les trois triangles rectangles de la Figure 5b et d'en tirer les relations suivantes

$$\tan \beta = \frac{b}{d}, \tan \phi = \frac{b}{c} \text{ et } \sin \alpha = \frac{c}{d}.$$

Figure 5. Angle d'inclinaison β de l'arête OB.

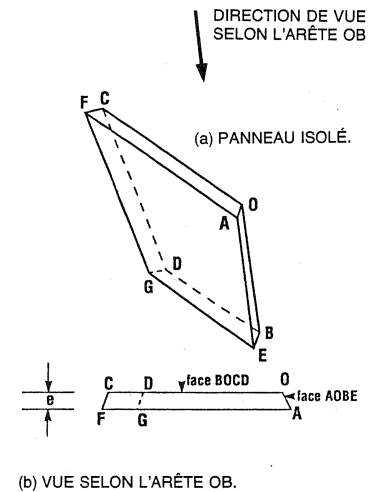


Ainsi

$$(2) \quad \tan \beta = \sin \alpha \tan \phi \quad \text{et} \quad \beta = \tan^{-1}(\sin \alpha \tan \phi)$$

Il reste à déterminer l'angle de coupe de la face AOBE, c'est-à-dire le rectiligne du dièdre formé des faces AOBE et BOCD. On obtient cet angle en coupant le dièdre à l'aide d'un plan perpendiculaire à l'arête OB ou bien en faisant une projection de la pièce sur un plan perpendiculaire à l'arête OB; c'est ce qu'on appelle une vue selon l'arête OB. Cette vue apparaît à la Figure 6b. Pour obtenir la valeur de ce rectiligne nous utilisons deux rotations et une projection.

Figure 6. Angle de coupe de la face AOBE.

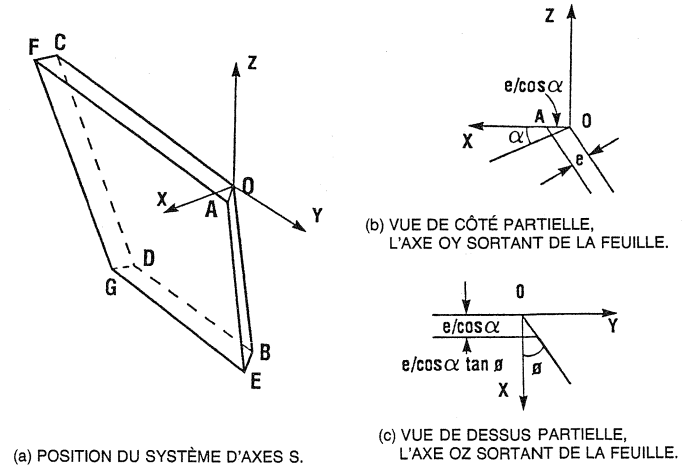


Considérons un système d'axes orthogonaux positivement orientés OXYZ, dénoté S, tel qu'indiqué à la Figure 7a. L'axe OY contient le segment OC et le plan Z = 0 contient la face AOFC. En utilisant les Figures 7b et 7c, le triplet des coordonnées du point A, ou du vecteur OA, par rapport au système S est

$$(3) \quad [\vec{OA}]_S = \frac{e}{\cos \alpha} (1, \tan \phi, 0)^t$$

(où le «t» indique l'opération de transposition).

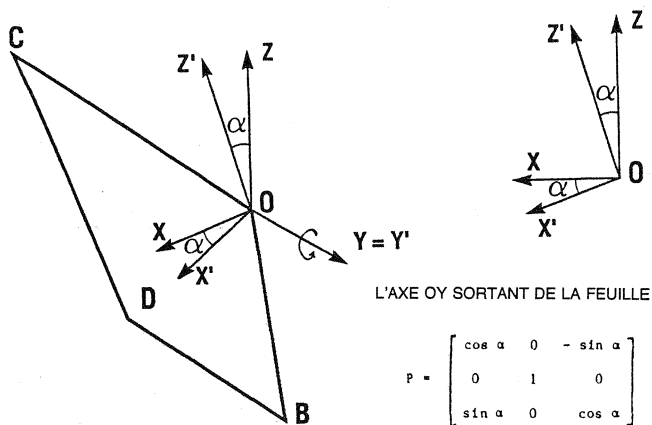
Figure 7. Position du point A par rapport au système d'axes S.



Par une rotation du système d'axes S d'un angle α dans le sens antihoraire autour de l'axe OY telle qu'indiquée à la Figure 8a, nous obtenons le système d'axes $OX'Y'Z'$, dénoté S' . Les axes OY et OY' coïncident et le plan $X' = 0$ contient la face B OCD. La matrice de rotation P associée à cette transformation, et donnée à la Figure 8b, doit satisfaire à l'équation matricielle $[\vec{v}]_{S'} = P [\vec{v}]_S$ pour tout vecteur \vec{v} (voir Alric et al [1, pp. 233-235] ou Leroux [2, pp. 231-235]). Ainsi en utilisant la matrice P et (3) nous obtenons

$$(4) \quad [\vec{OA}]_{S'} = \frac{e}{\cos \alpha} (\cos \alpha, \tan \phi, \sin \alpha)^t.$$

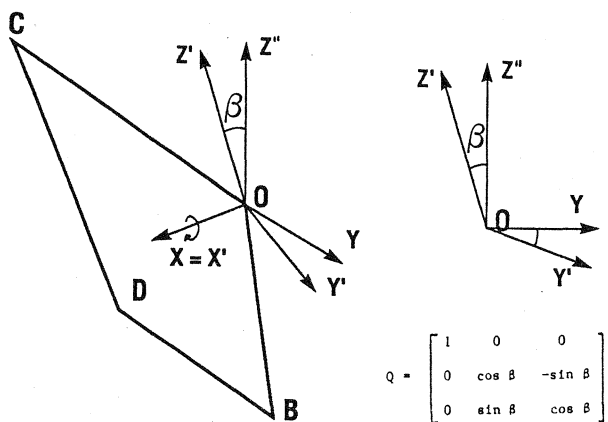
Figure 8. Systèmes d'axes S et S'.



(a) ROTATION EN SENS ANTIHORAIRE AUTOUR DE L'AXE OY.

(b) MATRICE DE ROTATION P.

Figure 9. Systèmes d'axes S' et S''.



(a) ROTATION EN SENS HORAIRE AUTOUR DE L'AXE OX'.

(b) MATRICE DE ROTATION Q.

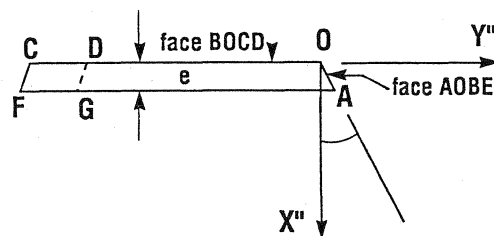
Par une rotation du système d'axes S' d'un angle β dans le sens horaire autour de l'axe OX' telle qu'indiquée à la Figure 9a, nous obtenons un système d'axes $OX''Y''Z''$, dénoté S'' . Les axes OX' et OX'' coïncident. La matrice de rotation Q associée à cette transformation, et donnée à la Figure 9b, est déterminée à l'aide de l'équation matricielle $[\vec{v}]_{S''} = Q[\vec{v}]_{S'}$, qu'elle doit satisfaire pour tout vecteur \vec{v} . Alors, en utilisant la matrice Q et (4) nous avons

$$(5) \quad [\vec{OA}]_{S''} = \frac{e}{\cos \alpha} (\cos \alpha, \cos \beta \tan \phi - \sin \beta \sin \alpha, \sin \beta \tan \phi + \cos \beta \sin \alpha)^t.$$

Notons que $[\vec{OA}]_{S''} = QP [\vec{OA}]_S$. Après cette seconde rotation, l'axe OZ'' contient l'arête OB et le plan $X'' = 0$ contient la face B OCD. Nous pouvons alors déterminer l'angle θ de la figure 10 à l'aide d'une projection orthogonale sur le plan $Z'' = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{Y''_A}{X''_A} = \frac{\cos \beta \tan \phi - \sin \beta \sin \alpha}{\cos \alpha} \\ &= \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} (\tan \phi - \tan \beta \sin \alpha). \end{aligned}$$

Figure 10. Vue selon l'arête OB ou projection sur le plan $Z'' = 0$ (l'axe OZ'' sortant de la feuille).



Mais $\tan \beta = \sin \alpha \tan \phi$, (voir l'équation (2)) donc $\tan \phi = \cos \alpha \cos \beta \tan \beta$.

De plus, comme $\cos \beta \geq 0$, nous avons

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha \tan^2 \phi}}$$

d'où

$$(6) \quad \tan \theta = \frac{\cos \alpha \tan \phi}{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha \tan^2 \phi}}$$

et

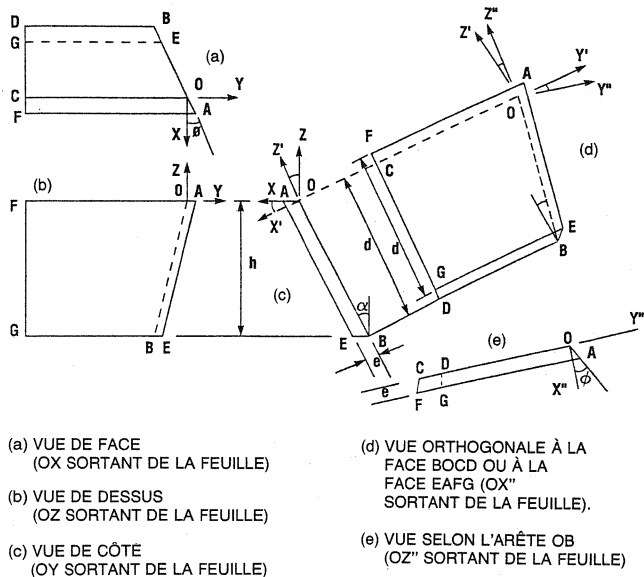
$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\cos \alpha \tan \phi}{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha \tan^2 \phi}} \right)$$

Finalement, le rectiligne du dièdre formé des faces BOCD et AOB E est $90^\circ + \phi$ (comparer les Figures 6 et 10).

3.3 Résumé

Les formules (1), (2) et (6) servent à déterminer le programme de coupe du panneau considéré et la Figure 11 contient cinq vues utiles et peut constituer un plan du panneau.

Figure 11. Les vues utiles du panneau.



4. Extension du problème

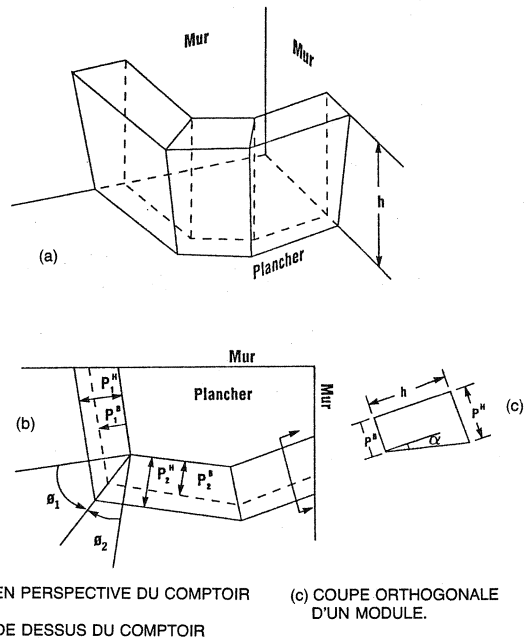
Nous pouvons considérer des comptoirs anguleux plus généraux comme celui présenté à la Figure 12. Les angles α de deux panneaux adjacents sont reliés selon les formules suivantes:

$$\frac{p_i^H - p_i^B}{h} = \tan \alpha_i \quad (i = 1, 2)$$

$$\frac{p_1^H}{p_2^H} = \frac{\cos \phi_1}{\cos \phi_2} = \frac{p_1^B}{p_2^B}$$

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\cos \phi_1}{\cos \phi_2}$$

Figure 12. Comptoir anguleux.



Ces formules permettent de déterminer les angles α de proche en proche connaissant les angles ϕ .

5. Conclusion

En utilisant la trigonométrie et l'algèbre linéaire, nous avons déterminé toutes les quantités nécessaires à la coupe des panneaux d'un comptoir anguleux. Le problème est essentiellement la détermination du rectiligne d'un dièdre. La réalisation des différentes vues de la Figure 11 est un exercice de géométrie descriptive (voir Paré et al [4]).

Références

[1] Alric G., A. Joffe et H. Tournier, **Géométrie vectorielle**, McGraw-Hill Éditeurs, Montréal, 1969.

[2] Guion A., **Cours de Géométrie, Tome III (6^e édition)**, Maison d'édition A. de Boeck, Bruxelles, 1965.

[3] Leroux P., **Algèbre linéaire une approche matricielle**, Modulo Éditeur, Ville Mont-Royal (Québec), 1983.

[4] Paré E.G., R.O.L Loving, I.L. Hill, et R.C. Paré, **Descriptive Geometry (7th edition)**, Macmillan, New York, 1987.

François Dubeau

Janvier 1989

Département de mathématiques
Collège militaire Royal de Saint-Jean
Saint-Jean-sur-Richelieu, Québec, Canada, JOJ 1R0