Les Barycentres?
Un problème de points

Maurice Glaymann

Cet article a pour point de départ, le travail du Groupe de Géométrie, de l'IREM de BORDEAUX, *le barycentre: un outil spécifique*, présenté au Colloque de MEZE (26-28 mai 1988).

La notion *d'équilibre* y est introduite et reprise ici, d'un point de vue algébrique, grâce à la notation de Grassmann, ce qui donne toute son efficacité au calcul barycentrique.

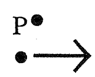
1. La notation de Grassmann

Si $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur et P un point quelconque

alors: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}$.

Le point P étant *une variable muette*, on convient de la supprimer et d'écrire

(1) $\overrightarrow{AB} = B - A$



c'est la notation de GRASSMANN (1809-1877).

Ainsi, un *vecteur* est *la différence de deux points* et réciproquement.

Plus généralement, pour tout réel k et tout vecteur

$\overrightarrow{AB}$, on pose:

(1') $k\overrightarrow{AB} = kB - kA$

Application

Définition

G est le barycentre de (A,a), (B,b), (C,c), où a,b,c sont trois réels avec $a+b+c \neq 0$, et A, B, C des points si:

(2) $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$

La notation de GRASSMANN conduit à

$a(A-G)+b(B-G)+c(C-G) = 0$

ou

$aA+bB+cC-(a+b+c)G = 0.$

Posons $d=-(a+b+c)$, alors

d est le réel tel que: $a+b+c+d=0$, il vient

(3) $aA+bB+cC+dG=0$, avec $a+b+c+d=0$,

qu'on appelle **équation d'équilibre** ou plus simplement **équilibre.**

Si $aA+bB+cC+dD=0$ est un équilibre, alors $a+b+c+d=0$, et un des quatre points A, B, C ou D est barycentre des trois autres; les quatre points jouent un rôle symétrique.

Plus généralement, l'équation

$$\sum_{i=1}^{n} a_iA_i = \sum_{j=1}^{p} b_jB_j$$

est un équilibre, si et seulement, $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{p} b_j$.

Quelques propriétés des équilibres

Nous allons mettre en évidence quelques propriétés que nous utiliserons dans la suite.

a) Considérons l'équilibre

(1) $aA+bB+cC+dD=0$ avec $a+b+c+d=0$

quelque soit le point X, on a

$a\overrightarrow{XA}+b\overrightarrow{XB}+c\overrightarrow{XC}+d\overrightarrow{XD} = \overrightarrow{0}$

et quelque soit le réel k,

$ka\overrightarrow{XA}+kb\overrightarrow{XB}+kc\overrightarrow{XC}+kd\overrightarrow{XD} = \overrightarrow{0}$

il en résulte que (1) implique l'équilibre:

(2) $kaA+kbB+kcC+kdD=0$

avec $ka+kb+kc+kd=0.$

Inversement, pour $k \neq 0$, (2) implique (1).

b) Considérons deux équilibres:

$aA+bB+cC=0$ avec $a+b+c=0$

et $pP+qQ+rR=0$ avec $p+q+r=0$;

dans ces conditions, on obtient l'équilibre:

$aA+bB+cC+pP+qQ+rR=0$

avec $a+b+c+p+q+r=0.$

c) L'équilibre (1) implique l'équilibre

$dD=-aA-bB-cC$ avec $d=-a-b-c.$

En effet, quelque soit le point X,

$a\overrightarrow{XA}+b\overrightarrow{XB}+c\overrightarrow{XC}+d\overrightarrow{XD} = \overrightarrow{0}$

ce qui implique

$d\overrightarrow{XD} = -a\overrightarrow{XA}-b\overrightarrow{XB}-c\overrightarrow{XC}$ avec $d=-a-b-c$;

d'où le résultat.

d) Les équilibres

$dD=aA+bB+cC$ avec $d=a+b+c$

et

$eE=bB+cC$ avec $e=b+c$

impliquent l'équilibre

$dD=aA+eE$ avec $d=a+e$.

Il est facile de généraliser toutes ces propriétés.

2. Étude de trois points en équilibre

Voici un équilibre de trois points:

$aA+bB+cC=0$ avec $a+b+c=0$

qui se traduit par

$$a\overrightarrow{CA}+b\overrightarrow{CB}+c\overrightarrow{CC} = \overrightarrow{0}.$$

Si on a

$$a\overrightarrow{CA}+b\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}$$

avec $a \neq 0$, alors

$$\overrightarrow{CA} = -\frac{b}{a}\overrightarrow{CB}$$

et les points A, B, C sont **alignés**. D'où le théorème suivant.

Si les points A, B, C, affectés respectivement des coefficients a, b, c forment un équilibre: $aA+bB+cC=0$ avec $a+b+c=0$;

alors, ou bien **$a=b=c=0$**

ou bien

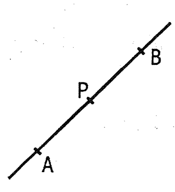
les points A, B, C sont alignés et un des points est barycentre des deux autres.

Inversement, si les points A, B, C sont alignés, alors il existe trois réels a, b, c tels que l'on ait l'équilibre

$aA+bB+cC=0$ avec $a+b+c=0$.

Application: caractérisons le point P qui partage le segment AB dans le rapport k. Par définition, on a:

$$\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PB}$$



soit $A-P=k(B-P)$;

d'où l'équilibre

$A-kB=(1-k)P$

En particulier, pour $k=-1$, P est **le milieu** de AB et on a l'équilibre

$2P=A+B$.

3. Étude de quatre points en équilibre

Voici un équilibre de quatre points:

$aA+bB+cC+dD=0$ avec $a+b+c+d=0$

qui se traduit par

$$a\overrightarrow{DA}+b\overrightarrow{DB}+c\overrightarrow{DC}+d\overrightarrow{DD} = \overrightarrow{0}.$$

Si $a \neq 0$, on a alors

$$\overrightarrow{DA} \neq -\frac{b}{a}\overrightarrow{DB} -\frac{c}{a}\overrightarrow{DC}.$$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ sont **coplanaires,** autrement dit les points A, B, C, D sont **coplanaires.** D'où le

Théorème

Si les points A, B, C, D affectés des coefficients a, b, c, d forment un équilibre

$aA+bB+cC+dD=0$ avec $a+b+c+d=0$

alors ou bien **$a=b=c=d=0$**

ou bien

les points A, B, C, D sont coplanaires et un des points est barycentre des trois autres.

Inversement, si les points A, B, C, D sont coplanaires, alors il existe quatre réels a, b, c, d tels que l'on ait l'équilibre

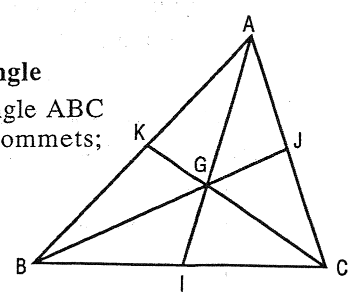
$aA+bB+cC+dD=0$ avec $a+b+c+d=0$.

4. Applications

1) Isobarycentre d'un triangle

L'isobarycentre du triangle ABC est le barycentre de ses sommets; d'où:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$



qui s'écrit $A-G+B-G+C-G=0$

d'où l'équilibre 3G=A+B+C.

Si I, J et K désignent les barycentres respectifs des segments BC, CA et AB:

2I = B+C, 2J = C+A et 2K = A+B

Des équilibres

3G=A+B+C et 2I=B+C,

on déduit l'équilibre 3G=A+2I équivalent à

$$3\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IA}.$$

D'où le théorème: les points A, G, I sont alignés et G est situé aux 2/3...

De même, des trois équilibres

2I=B+C, 2J=C+A et 2K=A+B,

on déduit par addition:

2(I+J+K)=B+C+C+A+A+B;

d'où l'équilibre:

I+J+K=A+B+C;

il en résulte que

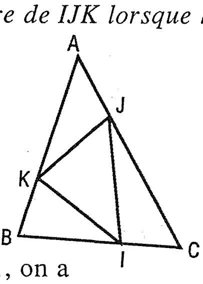
I+J+K=3G.

Ainsi, les triangles ABC et IJK ont **le même** isobarycentre.

2) Un lieu

Soit ABC un triangle; et I,J,K les points qui partagent respectivement les segments BC, CA et AB dans le rapport k.

Quel est le lieu de l'isobarycentre de IJK lorsque k varie?



On a les trois équilibres:

(1-k)I=B-kC, (1-k)J=C-kA et

(1-k)K=A-kB;

il vient, par addition:

(1-k)(I+J+K)=(1-k)(A+B+C);

et on omet le cas trivial où k= -1, on a

I+J+K=A+B+C=3G.

Ainsi, quelque soit le réel k (k≠ -1), les triangles IJK et ABC ont le même isobarycentre. Le lieu cherché se réduit au seul point G.

Il est alors facile de généraliser cette étude à un polygone.

5. Deux problèmes classiques

1) Premier problème

Soit ABC un triangle; a, b, c sont trois réels, tels que a+b+c≠0.

G est le barycentre de (A,a), (B,b), (C,c),

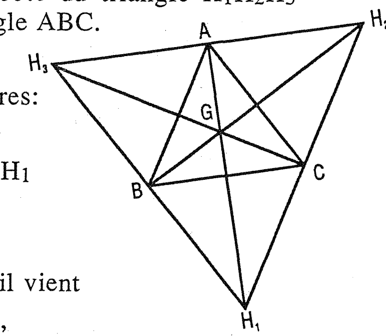
H_1 est le barycentre de (A,-a), (B,b), (C,c),

H_2 est le barycentre de (A,a), (B,-b), (C,c),

H_3 est le barycentre de (A,a), (B,b), (C,-c).

a) Établir que les droites AH_1, BH_2 et CH_3 sont concourantes.

b) Montrer que chaque côté du triangle $H_1H_2H_3$ passe par un sommet du triangle ABC.



Preuves

a) On dispose des équilibres:

(1) aA+bB+cC=(a+b+c)G

(2) -aA+bB+cC=(-a+b+c)H_1

(3) aA-bB+cC=(a-b+c)H_2

(4) aA+bB-cC=(a+b-c)H_3

En retranchant(4) de (1), il vient

2cC=(a+b+c)G-(a+b-c)H_3,

ce qui montre l'alignement des points C, G et H_3. La droite CH_3 passe par le point G. Il en est de même pour les droites BH_2 et AH_1.

b) En ajoutant (2) et (3), il vient:

2aA=(a-b+c)H_2+(a+b-c)H_3,

ce qui montre l'alignement des points A, H_2 et H_3; la droite H_2H_3 passe par le point A; de même, la droite H_1H_2 passe par le point C et la droite H_1H_3 passe par le point B.

2) Deuxième problème

Soit ABC un triangle.

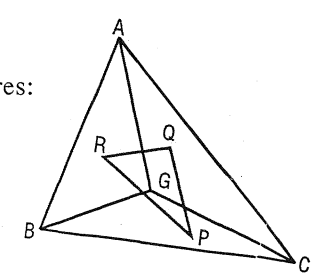
P est le barycentre de (A , 1) , (B , 2) , (C , 3),

Q est le barycentre de (A , 2) , (B , 3) , (C , 1),

R est le barycentre de (A , 3) , (B , 1) , (C , 2).

a) Montrer que les triangles ABC et PQR ont le même isobarycentre.

b) Montrer que chaque médiane du triangle ABC est parallèle à un côté du triangle PQR et réciproquement.



Preuves

a) On dispose des équilibres:

A+2B+3C=6P

2A+3B+C=6Q

3A+B+2C=6R

par addition et puis simplification par 6, il vient

P+Q+R=A+B+C

d'où le premier résultat.

ou encore

$$A+kC=D+kB.$$

En particulier, pour $k=1$ on a $A+C=B+D$,

et c'est un parallélogramme.

Exemple d'application

Soit G l'isobarycentre du triangle ABC. À tout point X, on associe le point Y tel que

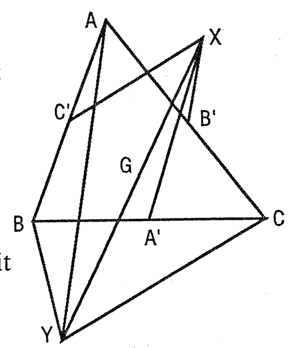
$$(1)\ \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}.$$

a) Exprimer Y en fonction de X et de G.

b) Si A′ est le milieu du segment BC,

montrer que les droites XA′ et AY sont parallèles.

Solution



a) L'égalité (1) conduit à:

$Y=A+B+C-2X$

ou encore $Y=3G-2X$

$(\overrightarrow{XY} = 3\overrightarrow{XG})$

b) De $2A'=B+C$, on déduit

$Y=A+2A'-2X$

ou encore

$Y+2X=A+2A'$;

ce qui prouve que A′XAY est un trapèze, d'où le parallélisme des droites XA′ et AY.

3) Quadrilatère

Soit A, B, C, D quatre points et a, b, c, d quatre réels tels que

$a+b+c+d=0$.

Considérons alors l'équilibre

$aA+bB+cC+dD=0$.

Supposons d'abord qu'un des réels soit nul: d par exemple. Dans ce cas

$aA+bB+cC=0$ avec $a+b+c=0$,

équilibre qui prouve l'alignement des points A, B et C.

Nous allons établir le

Théorème

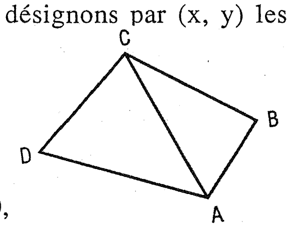
Si le quadrilatère ABCD n'est pas dégénéré, alors il existe un équilibre

$aA+bB+cC+dD=0$ avec $a+b+c+d=0$;

les réels a, b, c et d sont *uniques* à un facteur près.

Preuve

Dans le repère (A, B, C) désignons par (x, y) les coordonnées du point D:



$$\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC};$$

d'où l'équilibre

$(1-x-y)A+xB+yC-D=0$,

les coefficients ne sont pas nuls, en particulier $x+y \neq 1$

(sinon les points B, C et D seraient alignés).

Unicité

Supposons qu'il existe deux équilibres:

(1) $aA+bB+cC+dD=0$ avec $a+b+c+d=0$

(2) $a'A+b'B+c'C+d'D=0$ avec $a'+b'+c'+d'=0$;

multiplions (1) par d′, (2) par d et retranchons; il vient:

$(ad'-a'd)A+(bd'-b'd)B+(cd'-c'd)C=0$;

c'est un équilibre pour lequel les points A, B et C ne sont pas alignés; il en résulte que les coefficients sont tous nuls:

$ad'-a'd=bd'-b'd=cd'-c'd=0$;

il existe donc un réel μ tel que $a'=\mu a$, $b'=\mu b$ et $c'=\mu c$.

Voici deux exemples d'utilisation de l'équilibre $(1-x-y)A+xB+yC-D=0$.

1) Pour $x=-1$ et $y=1$, on a $A-B+C-D=0$;

le quadrilatère est un *parallélogramme*.

2) Pour $x=-k$ et $y=k$, on a $A-kB+kC-D=0$;

le quadrilatère est un *trapèze*.

7. Quadrilatère complet

Le quadrilatère ABCD est associé à l'équilibre (1):

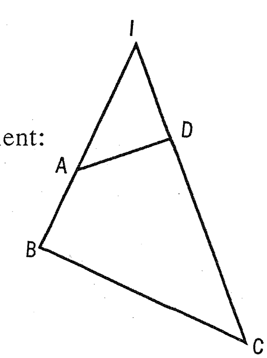
$aA+bB+cC+dD=0$

avec $a+b+c+d=0$

et $abcd\neq0$.

Supposons d'abord que $a+b\neq0$ et désignons par I le barycentre de

(A, a) et (B, b);



on a

(2) $(a+b)I=aA+bB$;

en remplaçant dans (1), il vient:

$(a+b)I+cC+dD=0$

mais comme

$a+b=-c-d$,

on a

(3) $(c+d)I=cC+dD$.

Il en résulte que le point I est *aussi* le barycentre des points (C,c) et (D, d). Autrement dit, les droites AB et CD se coupent en I, barycentre de (A, a), (B, b) et de (C, c), (D, d).

Supposons alors que $a+b=0$.

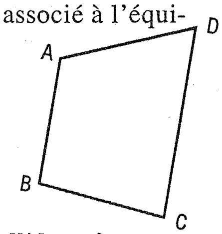
Dans ce cas, $c+d=0$ et (1) donne:

$$aA-aB+cC-cD=0,$$

équilibre qui donne $a\overrightarrow{BA}+c\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$, d'où le parallélisme des droites AB et CD. D'où le

Théorème

Considérons le quadrilatère ABCD associé à l'équilibre



$$aA+bB+cC+dD=0$$

avec $a+b+c+d=0$ et $abcd\neq0$

alors

1. Les droites AB et CD sont parallèles, si et seulement si a+b=0.

2. Les droites AB et CD sont sécantes en I, si et seulement si a+b≠0.

Le point I est le barycentre de (A, a), (B, b) et de (C, c), (D, d).

Un exemple de *quadrilatère complet*

Considérons le quadrilatère ABCD associé à l'équilibre: $A-2B+3C-2D=0$.

Soit I le point d'intersection des droites AD et BC,

J le point d'intersection des droites AC et BD,

et K le point d'intersection des droites AB et CD.

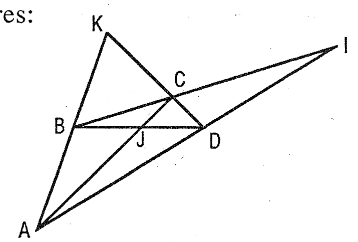
On dit alors que l'ensemble des points A, B, C, D, I, J est un quadrilatère complet.

D'après l'étude précédente, les points I, J et K sont définis par les équilibres:

$I=2D-A=3C-2B$

$4J=A+3C=2B+2D$

$K=2B-A=3C-2D$.



On en déduit que D est le milieu de AI, que J est le milieu de BD avec $\overrightarrow{JA} = -3\overrightarrow{JC}$ et que B est le milieu de KA.

Pour construire la figure, on part d'un triangle quelconque BCD;

A est sur la médiane CJ avec $\overrightarrow{JA} = -3\overrightarrow{JC}$; les points I et K sont les symétriques de A par rapport à D et B.

Exercice

Reprenons l'exercice c) de la section **6.**

ABCD est un parallélogramme, le point E partage le segment AB dans le rapport -1/2 et le point F partage le segment CD dans le même rapport. O est le milieu de AC.

Déterminer l'équilibre associé au quadrilatère ADOE et en déduire la nature du quadrilatère IDJB, où I est le point d'intersection des droites EF et AD et J celui des droites EF et BC.

On a $A-D=B-C$ avec $B=3E-2A$ et $C=2O-A$;

d'où $A-D=3E-A-2O$

et enfin $2A+2O-D-3E=O$.

Le point I est alors défini par $I=2A-D=3E-2O$.

De même, l'équilibre associé au quadrilatère CBOF est $2C+2O-B-3F=O$

et le point J est défini par $J=2C-B=3F-2O$.

On en déduit

$$I+J=2A-D+2C-B$$
$$=2(A+C)-(B+D);$$

d'où $I+J=B+D$;

ce qui montre que IDJB est un parallélogramme.

8. Quelques propriétés du tétraèdre

Ici soudainement les points ne sont plus dans un plan mais dans l'espace à 3 dimensions.

Soit ABCD un tétraèdre et G son isobarycentre:

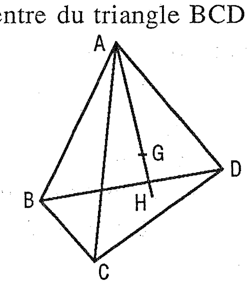
$$4G=A+B+C+D.$$

Si H désigne l'isobarycentre du triangle BCD,

$$3H=B+C+D,$$

il en résulte que

$$4G=A+3H;$$



d'où l'alignement des points A, H et G avec

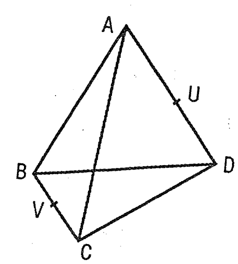
$\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{GH}$.

De même, si I, J et K sont les isobarycentres des triangles ABC, ABD et ACD, on a

$$3I=A+B+C$$
$$3J=A+B+D$$
$$3K=A+C+D.$$

Par addition, il vient

$$A+B+C+D=I+J+K+H;$$



il en résulte que les tétraèdres ABCD et IJKH ont le même isobarycentre.

D'autre part, $D+3I=4G$

$C+3J=4G$

$B+3K=4G$

ainsi les droites AH, BK, CJ et DI se coupent en G.

Enfin, si U et V sont les milieux respectifs des segments AD et BC:

$A+D=2U$ et $B+C=2V$;

d'où

$A+B+C+D=2(U+V)$

et

$U+V=2G$.

G est le milieu du segment UV. Il en résulte que les trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre sont concourantes en G.

Notons enfin que

$A-B+C-D=3(I-J+K-H)$;

il en résulte que le quadrilatère IJKH est un parallélogramme si et seulement si ABCD est aussi un parallélogramme.

Tous les résultats précédents sont encore valables si le tétraèdre est dégénéré en un quadrilatère plan.

9. Un autre problème dans l'espace

Soit D et Δ deux droites de l'espace, A et B deux points de D, A′ et B′ deux points de Δ, I et J les milieux respectifs des segments AA′ et BB′, et K un point de la droite IJ.

Montrer qu'il existe un point C *de* D *et un point* C′ *de* Δ *tels que* K *soit le milieu de* CC′.

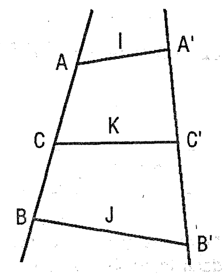
Solution

Par définition: $2I=A+A'$ et $2J=B+B'$.

K est le barycentre de (I, a) et (J, b)

où a et b sont deux réels:

$aI+bJ=(a+b)K$;



il en résulte que

$a(A+A')+b(B+B')=2(a+b)K$

ou encore

$(aA+bB)+(aA'+bB')=2(a+b)K$;

pour points C et C′:

$aA+bB=(a+b)C$

et $aA'+bB'=(a+b)C'$

qui sont tels que $C+C'=2K$.

Application

Montrer que si deux ensembles E et E′ sont convexes, alors l'ensemble des milieux des segments XY, où X et Y sont respectivement éléments de E et E′, est *convexe*.

La Croix-Rousse
14 juillet 1988

BIBLIOGRAPHIE

1. **R. Bricard:** le calcul vectoriel A. Colin, 1929

2. **M. Glaymann:** Théorie des torseurs. Librairie Vuibert, 1962

3. **M. Hausner:** A Vector Space Approach to Geometry. Prentice-Hall, Inc, 1965

4. **IREM de Bordeaux:** Le barycentre: un outil spécifique. Groupe de Géométrie, 1988

5. **IREM de Strasbourg:** le livre du problème, volume 5: Calcul barycentrique. CEDIC, 1975

Enseigner les probabilités, pourquoi?

Voici ce qui peut être envisageable entre 8 et 12 ans d'après Guy Brousseau:

Pratique d'expériences où le hasard joue un rôle.

Proposer aux enfants des situations dans lesquelles un modèle déterministe ne convient pas; les mettre en mesure d'effectuer des paris convenables, voire des prédictions révélatrices d'un modèle probabiliste implicite.

Introduction d'un vocabulaire utile et précis.

Permettre aux enfants de formuler les constatations effectuées, d'identifier et de désigner les **événements** et leur mesure.

Deux langages différents peuvent être nécessaires : mesures à priori, ce sont les modèles probabilistes, mesures à posteriori, ce sont les modèles statistiques.

Construction d'un modèle explicite.

Favoriser la découverte de relations entre des faits jugés pertinents, utiliser des opérations mathématiques pour obtenir des prévisions (rapport, combinatoire...), sans vouloir forcément justifier tout cela par une théorie mais en se contentant de vérifier expérimentalement les prévisions.

Introduction à l'étude systématique de la théorie.

Ce type d'activités permet aux enfants de se munir d'un certain nombre d'expériences, de notions et de théories leur permettant de décrire et résoudre systématiquement certaines catégories de problèmes (notion d'événement, de mesure...).