La structure des périodes dans les nombres à virgule: un cas de résolution de problème

Denis Therrien

Ces derniers temps j'ai été amené à construire un programme en Prolog (que j'ai baptisé: Période) pour obtenir des quotients *complets* des nombres rationnels a/b où b < 100 000. L'utilisation de ce programme s'est avéré d'une grande richesse du point de vue didactique. Entre autres choses:

— il permet une démarche «documentée» de résolution de problème;

— il permet de formuler des hypothèses qu'on peut infirmer ou confirmer constituant ainsi un modèle simple de démarche scientifique;

— il permet enfin d'illustrer un type d'activité mathématique axée sur l'investigation d'un vaste ensemble de nombres.

Dans les quelques lignes qui suivent, je vous décris l'essentiel du programme «période», dans une perspective inductive (donc ne pas s'attendre à des théorèmes sur la question).

Objectif du didacticiel

Établir des relations entre les deux formes d'écriture des nombres rationnels à savoir la notation a/b et la représentation sous forme de nombres à virgule.

Niveau: Sec. I-II-III

Considérations didactiques:

Bien que la mathématique soit essentiellement une science déductive, il n'en demeure pas moins qu'en processus d'apprentissage, il peut être fécond d'envisager une exploration de certains concepts. Bien sûr, on utilisera alors des procédés inductifs. En autant que l'on demeure prudent face à des généralisations hâtives, on pourra alors faire des hypothèses à être infirmées ou confirmées.

Le didacticiel *Période* permet justement ce type d'activité à propos de l'écriture des nombres à virgule.

La notion de nombre demeure un concept-clé pour la mathématique des niveaux primaire et secondaire. Une fois que l'idée de nombre entier positif est acquise, on procède à diverses extensions du nombre: les entiers relatifs, les nombres rationnels, les nombres complexes. En particulier, on définit les nombres rationnels comme le quotient de a par b ($a, b \in N$ et $b \neq 0$). Étant donné que les nombres entiers positifs sont représentés dans un système de numération (base 10), il en résulte qu'on peut écrire les nombres rationnels de la même façon que les nombres entiers positifs en procédant à une extension du système de numération. Par exemple, supposons que l'on doive diviser 243 par 3. Dans un premier temps, on cherchera à partager équitablement les centaines en trois. Comme ce n'est pas possible, on convertit les centaines en dizaines et l'on partage les 24 dizaines en 3, ce qui donne 8 dizaines. Ensuite, il suffit de partager les unités en 3 pour obtenir 1 unité. Procéder à une extension du système de numération consiste à admettre que les unités peuvent se convertir en «dixième» d'unités et ainsi de suite. Si l'on veut partager 9 objets entre 4 personnes, chacune d'elles recevra d'abord 2 objets et il restera un objet à partager. Mais au lieu de le séparer en quatre, on le séparera en 10, ce qui revient à convertir des unités en dixièmes. Chaque personne recevra alors deux dixièmes et il en restera 2 à partager. Les dixièmes restant sont séparés en 10 centièmes et chacun en reçoit 5. À la fin, chaque personne aura reçu deux objets, deux dixièmes d'objet et 5 centièmes d'objet.

$$9/4 = 2{,}25$$

On constate ainsi que tout nombre rationnel peut s'écrire dans un système de numération étendu sous forme d'un nombre à virgule. Pour obtenir l'écriture, sous forme d'un nombre à virgule, d'un nombre rationnel (a/b), il suffit de diviser a par b.

Ainsi $1/2 = 0{,}5$; $1/3 = 0{,}3...$;
$1/12 = 0{,}083...$; $1/7 = 0{,}142857...$

On remarque alors que le nombre de chiffres à droite de la virgule est tantôt fini (exemple 1/2 donne un chiffre à droite de la virgule) tantôt périodique (1/3 correspond à une période de 1 chiffre qui se répète sans cesse; 1/12 correspond à une période mixte, i.e il y a d'abord 08 et ensuite une période de chiffre qui se repète sans cesse); 1/7 donne lieu à une période de 6 chiffres.

D'où une question de recherche ou d'exploration: De quoi dépend le nombre de chiffres d'un période? Pour répondre à cette question, nous suggérons d'émettre la réponse sous forme d'hypothèses.

Exemple de déroulement hypothétique

Hypothèse: ce nombre est fonction du numérateur

Sachant que 1/7 produit une période de 6 chiffres. On voudra savoir ce qui se passe pour 2/7. Il s'agit alors d'écrire ce nombre et l'ordinateur répond:

0,285714... une période de 6 chiffres

Il ne semble pas que le numérateur y soit pour quelque chose. Mais... on n'est pas certain.

Peut-on trouver un autre nombre qui donne un nombre fini de chiffres à droite de la virgule? Essayons 1/16...ça marche! Serait-ce l'apanage des seuls nombres pairs? (non pas une question mais une hypothèse). Essayons 1/12. Le programme répond 0,083...une période d'un chiffre. Ainsi 16 et 12 sont des nombres pairs différents. Qu'est-ce que 16 a et que 12 n'a pas? Ainsi se poursuivra la démarche. Et d'hypothèses en hypothèses, on finira par trouver les caractéristiques des nombres qui produisent un nombre fini de chiffres et celles des nombres qui donnent lieu à des périodes.

La clé du problème se retrouve dans le système de numération (base 10) et l'opération de division!

Étude exploratoire du 1^er^ cas

Certains quotients produisent toujours un nombre fini de chiffres à droite de la virgule. Ex. 1/2 = 0,5; 3/2 = 1,5.

En connaissez-vous d'autres? Oui, il y a les quarts; Ex.: 3/4 = 0,75; 5/4 = 1,25.

Trouvez le quotient de 1/8.

Ainsi 1/2, 1/4, et 1/8 produisent un nombre fini de chiffres à droite de la virgule. Pouvez-vous suggérer une autre fraction du même genre? La réponse devrait être 1/16 qui produit aussi un nombre fini de chiffres. Faites maintenant une observation sur le nombre de chiffres pour chacun des cas:

1/2 = 0,5 *un* chiffre à droite de la virgule;
1/4 = 0,25 *deux* chiffres à droite de la virgule;
1/8 = 0,125 *trois* chiffres à droite de la virgule;
1/16 = 0,0625 *quatre* chiffres à droite de la virgule.

Trouvez la relation entre le nombre de chiffres à droite de la virgule et le dénominateur. Les dénominateurs utilisés jusqu'ici sont des puissances de deux:

$2 = 2^1$
$4 = 2^2$
$8 = 2^3$
$16 = 2^4$

Selon ce schéma, 1/32 produirait cinq chiffres.

Essayez ce cas avec le programme *Période*. D'autres cas vont confirmer que cette règle semble tenir.

Y a-t-il d'autres dénominateurs qui produisent un nombre fini de chiffres à droite de la virgule?

On se rappellera sans doute que 1/5 = 0,2.

En utilisant la même structure que précédemment, on peut raisonnablement penser que les puissances de cinq vont produire, elles aussi, un nombre fini de chiffres.

Essayez quelques cas avec le programme *Période*. Voici les premiers résultats:

1/5 = 0,2;
1/25 = 0,04;
1/125 = 0,008;
1/625 = 0,0016.

Comparez maintenant les résultats en nombre à virgule des deux cas étudiés:

1/2 = 0,5	et	1/5 = 0,2;
1/4 = 0,25		1/25 = 0,04;
1/8 = 0,125		1/125 = 0,008;
1/16 = 0,0625		1/625 = 0,0016

La nouvelle relation qui se dégage de cette comparaison pourrait s'exprimer de la façon suivante:

Le quotient de 1 par une puissance de deux donne comme développement décimal un nombre qui est la puissance correspondante de cinq.

Exemple: 1/8 i.e $1/2^3$ donne 0,125 et 125 = 5^3. **Réciproquement ce résultat vaut pour tout quotient de 1 par une puissance de cinq.**

Il s'ensuit que pour ces deux cas, non seulement on peut prédire le nombre de chiffres à droite de la virgule, mais encore donner le résultat exact sans pour autant effectuer la division.

Exemple: Sachant que $5^1 = 5$, $5^2 = 25$, $5^3 = 125$, $5^4 = 625$, $5^5 = 3125$ et $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$. On saura d'emblée que 1/3125 = 0,00032.

Est-ce que les puissances de 2 ou de 5 sont les seuls dénominateurs à produire un nombre fini de chiffres à droite de la virgule?

Il est assez facile de répondre que non puisque

1/10 = 0,1;
1/100 = 0,01;
1/20 = 0,05.

Ces cas sont-ils complètement différents des cas précédents?

On peut remarquer que:

$10 = 2 \times 5;$
$100 = 2^2 \times 5^2;$
$20 = 2^2 \times 5.$

Cette fois-ci, ce sont des produits de puissances de deux par des puissances de cinq.

Comment inférer le nombre de chiffres pour ces cas-là?

Essayez les quotients suivants avec le programme *Période*:

1/80 = 0,0125;
1/500 = 0,002;
1/1000 = 0,001.

En examinant les facteurs premiers de ces dénominateurs on trouve:

$80 = 2^4 \times 5;$
$500 = 2^2 \times 5^3;$
$1000 = 2^3 \times 5^3.$

Si l'on regarde d'autres cas semblables, on peut raisonnablement avancer que, dans ces cas, le nombre de chiffres correspond à la plus grande puissance de 2 ou de 5. **Quand les puissances sont égales, le nombre de chiffres est égal à l'une des deux puissances.**

Étude exploratoire du 2^e^ cas

Certains quotients produisent une période de «n» chiffres qui se répètent sans cesse.

Exemples: 1/7 = 0,142857...;
1/13 = 0,076923...;
1/17 = 0,0588235294117647...

Les trois exemples précédents nous suggèrent que les

nombres premiers semblent répondre à la question. Essayez quelques cas:
1/19, 1/23, 1/31, 1/37, 1/41, etc.

Peut-on aussi prédire le nombre de chiffres dans la période?

On a constaté que:

1/7 → 6 chiffres;
1/13 → 6 chiffres;
1/17 → 16 chiffres;
1/19 → 18 chiffres;
1/23 → 22 chiffres;
1/29 → 28 chiffres;
1/31 → 15 chiffres;
1/37 → 3 chiffres;
1/41 → 5 chiffres.

En conséquence, il ne semble pas se dégager de régularités (*) pour ces cas. Tout ce que l'on peut dire, c'est que le nombre de chiffres est égal **au plus** à D-1 (où D est le dénominateur).

Si l'on connaît le nombre de chiffres pour les nombres premiers de l'intervalle [1-100] (sauf 2 et 5), peut-on prédire le nombre de chiffres pour les composés de ces nombres premiers?

Par exemple 1/21 = 0,047619... et 21 = 3 x 7. Étant donné que 3 donne 1 chiffre et 7 donne 6 chiffres, on pourrait penser que les 6 chiffres de 21 s'expliquent par 6 x 1 = 6.

Selon cette hypothèse 1/341 donnerait 30 chiffres puisque 341 = 11 x 31 et que 11 donne 2 chiffres tandis que 31 donne 15 chiffres. On vérifie à l'aide du programme que c'est bien le cas. Vérifions pour un autre cas, soit 323 = 19 x 17; comme 19 produit 18 chiffres et que 17 en produit 16, 323 devrait donner 18 x 16 = 288 chiffres. Or il n'en est rien, car 1/323 donne 144 chiffres! À y regarder de plus près, on remarque que 18 et 16 ont un facteur commun et que conséquemment le PPCM de 18 et 16 est 144. Donc nouvelle hypothèse, lorque le dénominateur est un produit de nombres premiers autres que 2 et 5, **le nombre de chiffres produits est égal au PPCM des facteurs de ce dénominateur.**

Par exemple, 1/35929 va produire 180 chiffres car 35929 = 19 x 31 x 61 qui donnent respectivement 18, 15 et 60 chiffres et le PPCM de ces nombres est 180.

(*) Lorsque l'on fait le quotient de 1 par un nombre premier autre que 2 et 5, la période se termine lorsque le reste redevient égal à 1. Supposons qu'à ce moment, nous avons atteint la puissance n^e de 10, alors le nombre $10^n - 1$ est un multiple du diviseur. Voici les premiers nombres de ce genre ainsi que leurs facteurs:

$10^1 - 1 = 9 = 3^2$;
$10^2 - 1 = 99 = 3^2 \bullet 11$;
$10^3 - 1 = 999 = 3^3 \bullet 37$;
$10^4 - 1 = 9999 = 3^2 \bullet 11 \bullet 101$;
$10^5 - 1 = 99\,999 = 3^2 \bullet 41 \bullet 271$;
$10^6 - 1 = 999\,999 = 3^3 \bullet 7 \bullet 13 \bullet 37$;
$10^7 - 1 = 9\,999\,999 = 3^2 \bullet 219 \bullet 4649$.

Reste le cas des nombres qui sont des puissances de nombres premiers.

On sait que 1/7 donne 6 chiffres. Qu'est-il de 49? Or 1/49 donne 42 chiffres i.e. 7 fois plus que 7, i.e. 42 = 7 x 6. Dans ces conditions 1/57967 donnerait 3822 chiffres car 57967 = $7^3 \times 13^2$ et 7^3 correspond à 294 et 13^2 correspond à 78 chiffres. Le PPCM de 294 et 78 est 3822.

Étude exploratoire du 3e cas

Certains quotients produisent un nombre fini de chiffres à droite de la virgule suivi d'une période qui se répète sans cesse.

La partie des chiffres non périodique se rapporte aux facteurs 2 et 5 compatibles avec la base 10. La partie périodique est fonction des facteurs non compatibles avec la base 10.

Essayez 1/12, 1/56, 1/48, 1/76;

$12 = 2^3 \times 3$ et $1/12 = 0{,}08\underline{3}\ldots$une période de 1 chiffre;
$56 = 2^3 \times 7$ et $1/56 = 0{,}\underline{017857142}\ldots$une période de 6 chiffres;
$48 = 2^4 \times 3$ et $1/48 = 0{,}020\underline{8}3\ldots$une période de 1 chiffre;
$76 = 2^2 \times 19$ et $1/76 = 0{,}01\underline{3}15789473684210526\ldots$une période de 18 chiffres ce qui correspond à l'explication donnée ci-haut.

Avec ces résultats, on voit que

1/3 donne une période de un chiffre;
1/11 donne une période de deux chiffres;
1/37 donne une période de trois chiffres;
1/4649 donne une période de sept chiffres.

Ainsi on peut déduire que 1/17 donne une période de 16 chiffres, parce que le plus petit nombre de la forme $10^n - 1$, multiple de 17, est:

9 999 999 999 999 999 i.e. un nombre à 16 chiffres.

Vous pouvez vérifier d'autres cas avec le programme *Période*.

On peut démontrer[1] que lorsque le nombre de chiffres de la période est inférieur à (p - 1) (où p est un dénominateur premier, ce nombre est un facteur de p - 1).

Note: Le didacticiel Période tourne sur IBM et compatibles.
Pour lancer le programme, on écrit à partir du DOS: période 4.exe.
La disquette est en vente à l'adresse suivante:
Didactek
C.P. 9755
Ste-Foy GIV 4C3

Denis Therrien
Département de didactique
Faculté d'Éducation
Université Laval

1 Lichtenberg Donovan, *Minicalculators and Repeating Decimal*, "Mathematics Teacher" (September 1978): 524-530.