JEUX ET PROBLÈMES

Jean-Marie Labrie
Université de Sherbrooke

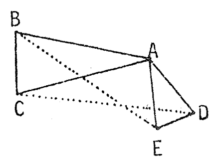
Cette chronique intéresse un grand nombre de nos embres de tout ordre d'enseignement. L'un d'eux, onsieur François Dubeau, du Collège militaire royal : St-Jean, nous propose un problème d'optimisation athématique qui peut se résoudre à l'aide d'arguments émentaires. C'est donc un problème simple de proammation quadratique. Pour en trouver de plus mpliqués, il nous suggère de consulter l'excellent ouage de P.-M. Pardalos et J.-B. Rosen: *Constrained Glo-l Optimization: Algorithms and Applications*, Computer ience 268, Springer, Berlin 1987.

Nous le remercions de l'intérêt qu'il porte à cette ıronique. Voici quelques solutions aux problèmes proɔsés dans les numéros précédents.

ROBLÈME 49 (Mai 1988)

ɔlution suggérée par F. Dubeau

Pour résoudre le problème, il suffit d'avoir deux triıgles *isocèles* ABC et AED tels que m $\overline{AB}$ = m $\overline{AC}$, m $\overline{E}$ = m $\overline{AD}$ et m $\angle$ BAC = m $\angle$ EAD. Les triangles AE et CAD sont égaux car



$$\angle \text{ BAE} = \text{m} \angle \text{ BAC} + \text{m} \angle \text{ CAE}$$
$$= \text{m} \angle \text{ EAD} + \text{m} \angle \text{ CAE}$$
$$= \text{m} \angle \text{ CAD}$$

donc m $\overline{BE}$ = m $\overline{CD}$.

Cette solution correspond à une rotation du triangle AD d'un angle $\angle$ BAC $\cong$ $\angle$ EAD dans le sens des guilles d'une montre autour du point A. Ainsi le point est amené sur le point B et le point D est amené sur point E. La distance entre deux points étant inchangée ar rotation on obtient m $\overline{BE}$ = m $\overline{CD}$.

rançois Dubeau,
épt. Math. C.M.R.
t-Jean-sur-Richelieu
uébec J0J 1R0

roblème 56

Soit les ensembles de nombres impairs:
.}, {3, 5}, {7, 9, 11}, {13, 15, 17, 19},...
ù chaque ensemble contient un élément de plus que ensemble précédent.

) Quel est le premier élément du n^e ensemble?

) Quel est le dernier élément du n^e ensemble?

re solution suggérée par C. Boily:

Formons le tableau suivant en se concentrant uniqueıent sur le 1^{er} et le dernier terme de chaque ensemble:

Rang	Description	Autre description
1^{er}	{1}	$\{1^2 - 0, \ldots, 1^2 + 0\}$
2^e	{3, 5}	$\{2^2 - 1, \ldots, 2^2 + 1\}$
3^e	{7, 9, 11}	$\{3^2 - 2, \ldots, 3^2 + 2\}$
4^e	{13, 15, 17, 19}	$\{4^2 - 3, \ldots, 4^2 + 3\}$
...	...	...
n^e	{...}	$\{n^2 - (n - 1), \ldots, n^2 + (n - 1)\}$

Par régularité, on trouve que le 1^{er} élément du n^e ensemble est $n^2 - n + 1$ et le dernier élément du n^e ensemble est $n^2 + n - 1$.

* * * * *

2^e solution suggérée par C. Boily:

Étant donné que le 1^{er} ensemble possède un seul terme,

que le 2^e ensemble possède 2 termes,

que le 3^e ensemble possède 3 termes, ...,

alors le n^e ensemble possède «n» termes.

Soit le rang du terme que l'on cherche dans le n^e ensemble:

$$0 < r \leq n, \text{ où } r \in N.$$

On peut donc poser que le r^e terme du n^e ensemble est

$$n(n - 1) + 2r - 1 \text{ où } 0 < r \leq n.$$

Christian Boily
C.P. 1275
144, rue Taschereau
St-Joseph (Beauce)
G0S 2V0

* * * * *

Autre solution du problème 56

Il s'agit de considérer deux suites différentes:

a) La suite des premiers termes: 1, 3, 7, 13, ...

b) La suite des derniers termes: 1, 5, 11, 19, ...

Dans chaque cas, il suffit de trouver le *terme général*:

a) $n^2 - n + 1$ pour $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$

b) $n^2 + n - 1$ pour $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$

N.B. Le nombre 1 est à la fois un 1^{er} et un dernier terme.

Michel Gignac
Cégep François-Xavier-Garneau
463, Franklin
Québec G1K 2G8

PROBLÈME 55

Bonne nouvelle année 1989!

Résoudre l'équation $\frac{x^3 + y^3}{x + y} = 3^{1989}$

où x et y sont des entiers naturels.

Solution suggérée par M. Gignac:

L'équation donnée se simplifie et on a:

$$x^2 - xy + y^2 = 3^{1989} \quad (1).$$

On isole comme suit:

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4(y^2 - 3^{1989})}}{2}$$

$$= \frac{y \pm \sqrt{4(3^{1989}) - 3y^2}}{2} \quad (2)$$

Ce qui implique:

$4(3^{1989}) - 3y^2 \geq 0$

ou encore $y \leq 2(3^{994})$

Par analogie ou symétrie, on peut avoir:

$x \leq 2(3^{994})$.

À cause de (1), on doit avoir:

$y = 2(3^{994})$ et $x = 3^{994}$ par (2)

Par symétrie, on a une 2^e^ solution:

$x = 2(3^{994})$ et $y = 3^{994}$

Voici maintenant les nouveaux problèmes:

PROBLÈME 57

(proposé par F. Dubeau)

Soit $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$. Déterminer la valeur maximale et la (les) solution(s) optimale(s) des programmes mathématiques suivants:

(a) $v_n^a(\vec{x}) = \sum_{i<j} x_i x_j$

(b) $v_n^b(\vec{x}) = \sum_{i\leq j} x_i x_j$

sous les contraintes $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$.

PROBLÈME 58

Pour paginer un livre, il a fallu 942 caractères. Combien de pages contient ce livre?

PROBLÈME 59

a. Ajoute trois termes à la suite suivante: a, b, c, e, d, f, g, h, j, i, k, l, m, o, p

b. Quels sont les cinq autres chiffres arabes qui continuent la suite: 5, 2, 8, 9, 4?

PROBLÈME 60

Un train de marchandises, long d'un kilomètre, traverse régulièrement, à la vitesse de 15 km à l'heure, un tunnel long d'un kilomètre. En combien de minutes franchit-il ce tunnel au complet?

Adresse: Jean-Marie Labrie
1431, rue Gauvin
Sherbrooke J1K 2J2

RÉFLEXION : Développement de l'idée de hasard chez l'enfant

Avant 7-8 ans, l'enfant ne distingue pas le possible et le nécessaire. Rien pour lui n'est prévisible à coup sûr, c'est-à-dire déductible selon un lien de nécessité. Rien, non plus, n'est imprévisible à coup sûr, c'est-à-dire fortuit. Il n'y a donc **ni hasard ni probabilité** faute d'un système de référence pour les opérations déductives.

De 7 à 11 ans, avec l'apparition des opérations logico-arithmétiques débute le développement de l'idée de hasard. En effet, la construction des opérations permet à l'enfant de concevoir le hasard comme l'antithèse du déductible. Il peut ainsi différencier **le** simple **possible du nécessaire**.

À partir de 12 ans, la pensée formelle naissante conduit l'enfant à opérer la synthèse entre le hasard et les opérations. Celles-ci permettent de structurer divers événements fortuits et dispersés en un système de probabilités. La pensée formelle conduit également à **la découverte des proportions** qui permettent de concevoir la légitimité des modèles probabilistes (loi des grands nombres par exemple).

PLOT, décembre 1986