LA GÉOMÉTRIE DE TOUS LES JOURS

Jacques Labelle

Le but de cet article est de présenter quelques problèmes de géométrie venant de situations concrètes de la vie courante. De tels exemples peuvent aider à convaincre l'élève que les mathématiques ne sont pas une suite de définitions abstraites et formules compliquées qu'il doit mémoriser puis chercher à appliquer, mais bien plutôt une science exacte qui s'avère indispensable à l'analyse rationnelle de beaucoup de situations pratiques. De plus, s'il connaît quelques principes et formules de base et maîtrise bien les manipulations algébriques élémentaires, l'élève peut résoudre une multitude de problèmes et retrouver la plupart des formules sans avoir à les mémoriser; il doit cependant parfois faire preuve d'un peu d'imagination et souvent de beaucoup de ténacité.

Problème I. Depuis la naissance de leurs quadruplets mes voisins les Tremblay ont plusieurs gros problèmes dont un de nature purement géométrique; le voici. Monsieur Tremblay veut faire de sa magnifique table de pic-nic carrée (Fig.1) une table parfaitement octogonale; il mesure très précisément la longueur c du côté et cherche à connaître la valeur de x (Fig.2) pour laquelle, en coupant et enlevant les quatre coins, le résultat sera un octogone régulier de côté a.

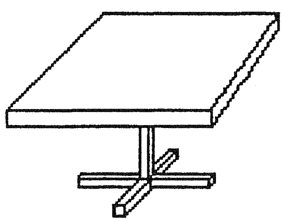


Fig.1

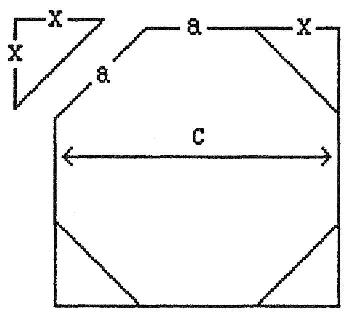


Fig.2

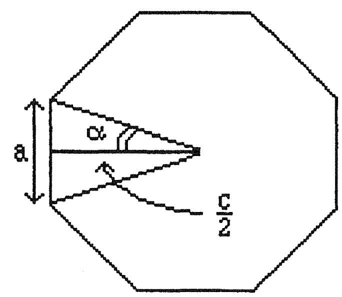


Fig.3

Solution 1. Par le théorème de Pythagore (voir Rappel 1), $a = (x^2 + x^2)^{1/2}$, d'où $a = \sqrt{2}\,x$; de plus, on a (Fig.2) : $c = x + a + x = 2x + a$; d'où $c = (2 + \sqrt{2})\,x$ et finalement

$$x = \frac{1}{2+\sqrt{2}}\,c = (0{,}2928932\ldots)\,c$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\,c = \frac{\sqrt{2}\,(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}\,c = \frac{2\sqrt{2}-2}{2}\,c = (\sqrt{2}-1)\,c = (0{,}4142135\ldots)\,c\ .$$

Solution 2. L'angle α (Fig.3) est de $\pi/8$ radians (voir Rappel 2). On a de plus (voir Rappel 3):

$$\tan\alpha = \frac{a/2}{c/2} = a/c\ .$$

Cherchons donc la valeur de $\tan(\pi/8)$ et le tour sera joué. Comme en général, on a (voir Rappel 3): $\cos(2\beta) = (\cos\beta)^2 - (\sin\beta)^2 = 2(\cos\beta)^2 - 1$, on en tire:

$$\cos\beta = \sqrt{\frac{1+\cos(2\beta)}{2}}\ ;\ \text{d'où}\ \cos(\pi/8) = \sqrt{\frac{1+\cos(\pi/4)}{2}}$$

$$\text{or } \cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \ \cos(\pi/8) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin(\pi/8) = \sqrt{1-(\cos(\pi/8))^2} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\tan(\pi/8) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}\ \sqrt{2+\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 .$$

On trouve finalement encore:

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} c \ \text{ et } \ x = \frac{1}{\sqrt{2}} a = \frac{1}{2+\sqrt{2}} c .$$

Problème II. Obtenir plutôt une table hexagonale (Fig.4) à partir de la table carrée des Tremblay.

Méthode 1. On enlève d'abord deux bandes (figure 5) de largeur:

$(1/2)c - (\sqrt{3}/2)a = 1/2\ (1- \sqrt{3}/2)\cdot c = (0{,}0669873\ldots)\cdot c$ (notez que $c = 2a$).

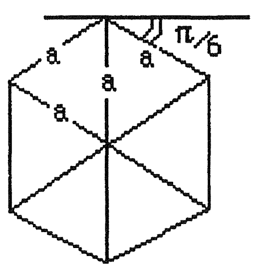


Fig.4

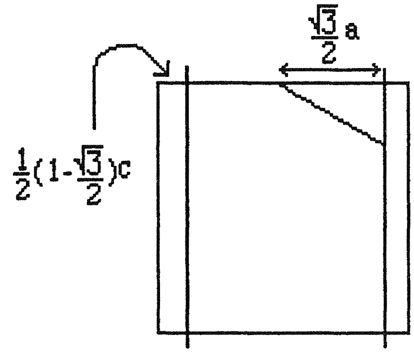


Fig.5

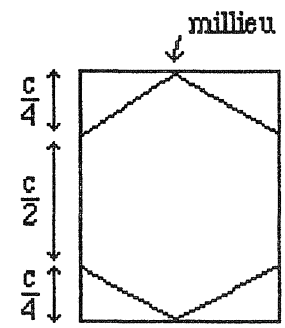


Fig.6

Ensuite on coupe et enlève les quatre coins tel qu'indiqué à la figure 6. (N'enlever qu'une seule bande est plus rapide mais donne une table plutôt "mal équilibrée").

Cette solution n'est pas la meilleure car on peut obtenir une table hexagonale un peu plus grande!

Méthode 2. En effet, calculons d'abord les angles dans la figure 7

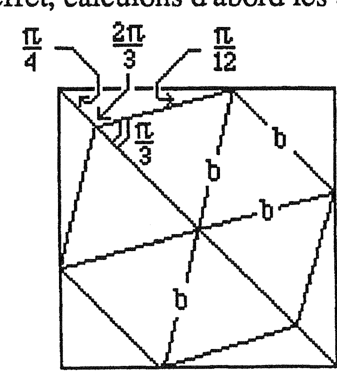


Fig.7

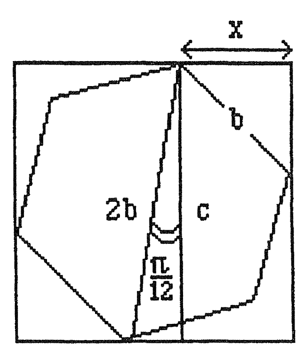


Fig.8

Utilisons maitenant le fait que:

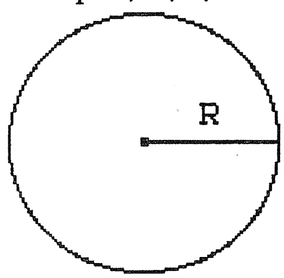
$$\cos(\pi/12) = \sqrt{\frac{1+\cos(\pi/6)}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} ,$$

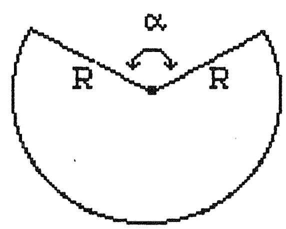
et la figure 8 pour obtenir un hexagone de côté b où :

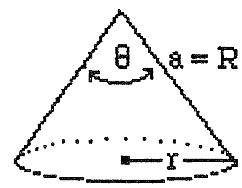
$$b = \frac{c}{2\cos(\pi/12)} = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\, c = (0{,}5176381\ldots)\cdot c\ .$$

Ce découpage gagne 3,5% (en grandeur du côté de l'hexagone) sur le découpage précédent où $a = (0{,}5)\cdot c$.

Problème III. A partir de disques de papier de rayon R (Fig.9), pour une fête d'enfant vous voulez fabriquer des chapeaux en forme de cône en coupant et enlevant une "pointe de tarte" (Fig.10) d'angle α puis en recollant les deux côtés de l'angle. Comment contrôler la hauteur h, l'angle θ et le rayon r du chapeau (Fig.11) ainsi obtenu. Pour ce faire, il faut trouver le lien entre, α et R, d'une part, et, θ, r et h (Fig.12) de l'autre.







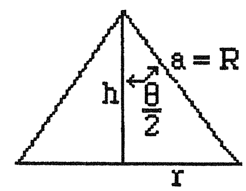


Fig.9 Fig.10 Fig.11 Fig.12

Ce lien découle du simple fait que le cercle de base du cône provient, après le collage, de la portion de circonférence du disque restant après avoir enlevé la pointe de tarte. On a donc:

$$2\pi r = \frac{2\pi-\alpha}{2\pi} 2\pi R = (2\pi-\alpha) R$$

$$\text{d'où } r = (1 - \alpha/2\pi)R \quad \text{et} \quad \alpha = 2\pi(R-r).$$

L'apothène a du cône (Fig.11) est précisément le rayon R du disque; de plus $\sin(\theta/2) = r/a = r/R$ d'où $\theta = 2 \arcsin(1-\alpha/2\pi)$; finalement la hauteur du cône (Fig.12) est $h = R\cos(\theta/2) = \sqrt{R^2-r^2}$. Si l'on veut des chapeaux hauts et pointus, on doit augmenter R en prenant des disques plus grands.

Problème IV. Julien revient de l'école par son trajet habituel comprennant (Fig.13) 400 pas sur le côté sud d'un parc et 300 pas sur le côté est. Il marche à la vitesse d'un pas à la seconde. Pour épater sa mère et arriver plus tôt, il décide de traverser le parc en diagonale le long de d.

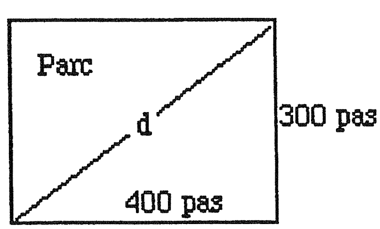


Fig.13

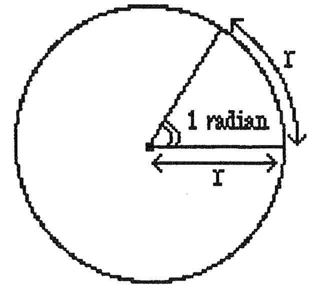


Fig.14

De combien de temps arrivera-t-il en avance à la maison?

Réponse: 1h 56min 40 sec *en retard* car, durant deux heures, il a joué dans le terrain de jeu!

Rappel 1. Théorème (de Pythagore). Dans le triangle rectangle de la figure 15, on a:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}\ .$$

Preuve. Considérons le carré (Fig.16) de côté b + c. Si on le découpe (mentalement cette fois!) en 4 morceaux comme à la figure 17, on obtient géométriquement la formule : $(b+c)^2 = b^2 + 2bc + c^2$.

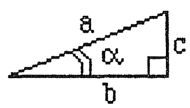


Fig.15

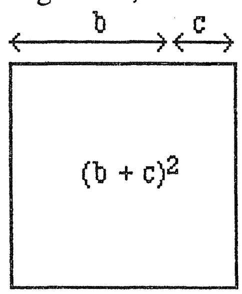


Fig.16

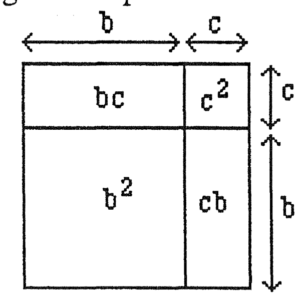


Fig.17

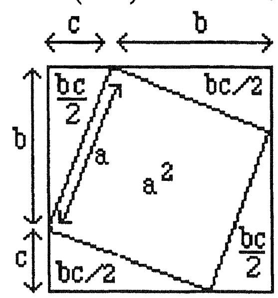


Fig.18

Si on le découpe plutôt en 5 morceaux comme à la figure 18, l'aire est cette fois:

$$4\,\frac{bc}{2} + a^2 = 2\,bc + a^2\,.$$

On en tire:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{et} \quad a = \sqrt{b^2 + c^2}\ .$$

Remarque. Cette démonstration est tout à fait rigoureuse mais que dire de celle-ci (Fig.19) prouvant que 441 = 442:

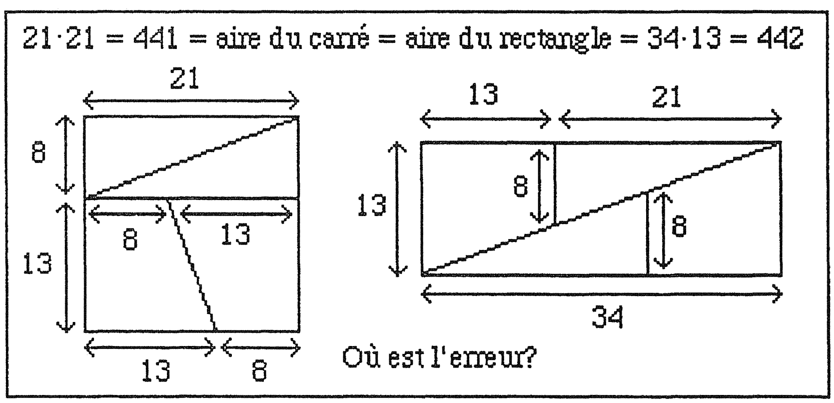


Fig.19

Rappel 2. Mesure des angles. Par définition, un angle de un radian (Fig.14) est tel que "le rayon et la longeur de l'arc" soient égaux tandis qu'un angle de un degré est un angle "qui fait 1/360 de tour complet". On a donc $360° = 2\pi$ radians; d'où 1 radian $= (360/2\pi)$ degrés $= 57°56'\ldots$ et 1 degré $= (2\pi/360)$ radians $= 0{,}017453\ldots$ radians.

Rappel 3. Trigonométrie. Si α est un angle entre 0 et $\pi/2$ radians, on considère le triangle rectangle de la figure 15 et on pose $\sin\alpha = c/a$, $\cos\alpha = b/a$, $\tan\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha = c/b$. Pour définir sin α, cos α et tan α pour un angle α quelconque, on fait tourner d'un angle α le point (1,0) sur le cercle unité dans le plan (Fig.20). Les coordonnées du point obtenu sont, par définition, (cos α,sin α).

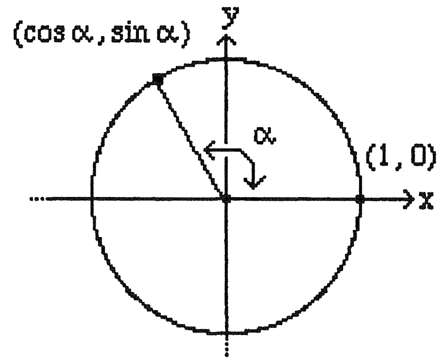


Fig.20

Par le théorème de Pythagore, on a: $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$.

De plus, les formules $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ et $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ sont immédiates.

On a aussi:(*) $\sin(\alpha+\beta) = (\sin\alpha)(\cos\beta) + (\sin\beta)(\cos\alpha)$ et $\cos(\alpha+\beta) = (\cos\alpha)(\cos\beta) - (\sin\alpha)(\sin\beta)$

Ces dernière formules peuvent être démontrées de façon élémentaire et purement géométrique ou a partir de la formule, dite d'Euler, comme voici.

Dans le cours MAT 203 du Cegep, on rencontre habituellement les séries de Taylor suivantes:

(1) $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots ;$$

(2) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots ;$$

(3) $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots ;$$

De plus, dans le cours MAT 101, on étudie les nombres complexes.

Comme on a: $1 = i^4 = i^8 = i^{12} = \cdots$; $i = i^5 = i^9 = \cdots$; $-1 = i^2 = i^6 = i^{10} = \dots$; $-i = i^3 = i^7 = i^{11} = \cdots$

Si, dans la formule (1),on pose $x = i\,\theta$ et on utilise les formules (2) et (3), on obtient la formule remarquable d'Euler:

(4) $$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta\ .$$

En particulier pour$\theta = \pi$, celle-ci s'écrit:

(5) $$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Formule où aparaissent les cinq constantes les plus importantes des mathématiques: 0, 1, π, e et i .

Si, dans (4), on pose $\theta = \alpha + \beta$. On trouve:

$\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$

de laquelle découle (*) après multiplication.