

L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

Guy Brousseau
IREM de Bordeaux

Depuis que la géométrie élémentaire est une théorie «achevée» du point de vue scientifique, les transformations que subit son enseignement sont entièrement des productions de l'activité didactique des professeurs. Elles devraient donc pouvoir s'expliquer par les contraintes diverses, culturelles, professionnelles, sociales qui s'exercent sur la société des enseignants. Il est indispensable pour une approche scientifique de ces phénomènes de distinguer ces contraintes mais surtout les processus par lesquels elles produisent des effets à long terme.

* * *

1 Classons ces contraintes selon leurs «sources», c'est-à-dire les milieux qui sont supposés les exercer:

Ainsi la noosphère des mathématiciens est intéressée à avoir des étudiants qui puissent transposer certaines questions en termes géométriques. Les scientifiques, physiciens, naturalistes, géographes, etc. se posent en utilisateurs de différents modèles géométriques.

La société dans son ensemble réclame que les élèves disposent de représentations géométriques et de techniques efficaces pour résoudre les «problèmes courants» liés à l'espace.

Les pédagogues et les psychologues insistent pour que l'enseignement soit adapté aux possibilités et aux besoins des élèves selon leurs capacités, leur âge et leur milieu...

Parmi ces contraintes bien peu sont susceptibles de s'exercer directement et réellement - c'est-à-dire à court terme en fonction de leur satisfaction effective - Toutes sont médiées par des circuits qui ne réagissent guère qu'à une appréciation essentiellement idéologique de la situation et ne la traitent qu'au niveau symbolique.

Par contre, les contraintes liées à la négociation didactique, celle qui lie le maître à l'élève à propos de chaque activité d'enseignement, s'exercent de façon répétée et impérieuse. Elles n'ont pas besoin d'être exprimées pour s'exercer.

De plus, lorsqu'il est nécessaire qu'elles s'expriment, sous forme de convention ou de décisions par exemple, elles doivent seulement être justifiées, vers l'extérieur, dans le langage ou l'idéologie de l'interlocuteur. Il est rarissime que cette justification explicite rencontre la justification effective et réelle.

La principale caractéristique de cette contrainte interne à l'activité d'enseignement c'est d'être localement stabilisée. Les corrections s'exercent dans

des temps très courts et le professeur ne peut guère chercher ailleurs que dans sa propre action des moyens de les exercer.

2 Les contraintes se manifestent sous formes de «choix didactiques» du professeur concernant à la fois les rapports de l'élève à la connaissance, les conditions d'apprentissage et l'ordre d'introduction des notions.

Par exemple, le professeur, selon qu'il veut favoriser tel ou tel aspect de la relation didactique peut hésiter entre plusieurs présentations de son cours:

i) *La présentation académique*, ou *encyclopédique*, a pour objet de permettre l'accès «immédiat» à toutes les connaissances présentées. Elle suppose que l'élève, utilisateur, dispose des connaissances lui permettant cette lecture et cette acquisition directe, ou en tout cas qu'il se charge de les réunir en suivant un processus à sa charge lui aussi.

Cette présentation installe d'emblée le rapport au savoir qui sera celui que l'élève doit atteindre à la fin de sa formation, et qui suppose que les acquisitions se font par l'exercice d'un «savoir-apprendre» à peu près invariable sur une famille de savoirs à peu près indépendants.

ii) À l'opposé de ce point de vue, se situe la *présentation axiomatique* des savoirs. Elle a pour objet de permettre au professeur de ne jamais faire appel dans son cours à des notions qui n'auraient pas été introduites auparavant ou qui ne pourraient être définies ou prouvées au moment de leur utilisation. Elle prend en charge explicitement ce qui est supposé «connu» de l'élève et une manière de «construire» ou d'acquérir avec cela les connaissances nouvelles. Plus précisément elle suppose que les savoirs ne peuvent pas être acquis indépendamment les uns des autres et que les acquisitions elles-mêmes changent le savoir-apprendre de l'élève.

Ce point de vue axiomatique est particulièrement adapté au contrôle et à amélioration de la communication entre le professeur et l'élève. Il facilite la négociation du contrat didactique en ce sens qu'il tend à permettre au professeur de renvoyer l'élève soit à des enseignements antérieurs dont «l'acquisition» est à sa charge, soit à des conditions «d'acquisition» vraiment «universelles» et que l'élève ne saurait rejeter. (La preuve de la validité de ce qu'il doit apprendre par exemple). Localement, le maître peut manipuler le débit des informations nouvelles qu'il apporte.

Le savoir ne réside plus seulement dans une collection de faits isolés mais dans une manière culturellement reconnue de les organiser.

iii) Les deux premières présentations tendent à optimiser les rapports de l'élève soit avec la connaissance, soit avec le système éducatif sur la base de l'acquisition d'un corps de savoirs. Mais s'il s'agit d'entraîner l'élève à une utilisation du savoir et ce à une fin autre que l'acquisition elle-même, il apparaît plus indiqué de suivre un ordre conforme à cette utilisation: celui des différentes étapes des actions qu'il faudra reproduire ou gérer.

Dans cette *présentation «fonctionnelle»* calquée sur un algorithme, il n'est fait appel aux connaissances théoriques qu'au moment où elles entrent en scène pour déterminer ce qu'il convient de faire.

Cette présentation est centrée sur l'optimisation directe du rapport de l'élève avec son milieu.

iv) Une *présentation «génétique»* tend à montrer que les connaissances sont une réponse rationnelle à des problèmes légitimes, et permet ainsi un autre type d'articulation ou de compréhension des savoirs. La justification qu'elle en donne, interne, est tout à fait différente de la justification fonctionnelle par les techniques où on les utilise. Cependant elle traite assez bien des rapports entre l'activité intellectuelle du sujet, la connaissance et son action sur le milieu. L'*introduction historique* pourrait sembler de ce point de vue la plus proche de la genèse «vraie».

v) Pour enseigner à l'élève une connaissance nouvelle, il est indispensable de s'appuyer sur ce qu'il connaît déjà mais il serait naïf de croire qu'il connaît ce qui lui a été enseigné et ne connaît que cela (et en particulier rien, si rien ne lui a été enseigné). Son activité personnelle lui fait développer des représentations et des modèles spontanés qui jouent un rôle décisif dans ses acquisitions. Il serait aussi naïf de croire que ces modèles spontanés vont s'adapter naturellement aux acquisitions nouvelles et évoluer sans heurts vers la connaissance scientifique.

L'exercice, la mise à l'épreuve, la modification des opinions anciennes de l'élève est une tâche ardue mais nécessaire à l'enseignement des connaissances nouvelles.

Si l'on admet qu'il existe une régularité, une certaine homogénéité des acquisitions de connaissances lors du développement de l'enfant - dues à des causes psychogénétiques et sociales profondes - et/ou si l'on admet qu'il existe une filiation épistémologique incontournable, constitutive, de ces connaissances il est possible de concevoir des *présentations psychogénétiques et/ou épistémologiques du savoir*.

vi) Antagonistes à ces contraintes qui concernent le sujet épistémique, il en existe d'autres qui concernent l'adaptation de la présentation des connaissances à la diversité des caractères individuels des élèves et à leur insertion socio-culturelle présente ou projetée.

Ces diverses contraintes paraissent contradictoires; l'ordre axiomatique, l'ordre fonctionnel ou algorithmique, l'ordre historique ou génétique ou psychopédagogique ne peuvent coïncider. Les choix seront des compromis et il est clair que l'on peut en observer en géométrie de très différents dans les diverses directions indiquées.

3 Pour montrer qu'un système agit sur les choix d'enseignement il ne suffit pas de montrer que tel milieu les influence ou les infléchit dans tel sens pour telle raison, car on risquerait de prendre le signe pour la chose elle-même. Il faut aussi expliquer les mécanismes régulateurs qui s'imposent aux acteurs et les contraignent à maintenir stables les caractères que l'on déclare sous l'influence.

* * *

Stabilité malgré les perturbations, variations et corrections. Car les influences occasionnelles, même puissantes ont peu de chance de produire des effets positifs durables sur l'enseignement. La plupart des améliorations sont l'effet d'*optimisations*, et les nombreux choix qui produisent ces solutions optimales sont rarement des alternatives simples. Au contraire, ils doivent concilier des intérêts divergents, conjuguer des solutions paradoxales... Ces équilibres ne se maintiennent que dans la mesure où le système qui influence l'autre, surtout s'il l'influence intentionnellement, est soumis à des rétroactions du système influencé. De sorte que les influences qui sont les plus intéressantes pour l'analyse de l'enseignement sont celles qui se manifestent par des variations *moindres* que celles que l'on pourrait attendre d'un fonctionnement indépendant, ou encore celles pour lesquelles il apparaît rapidement des corrections appropriées en réponse aux perturbations occasionnelles. Les influences les plus importantes sont celles qui concourent à la stabilité du système.

C'est sur elle que l'action didactique doit s'exercer pour des effets durables, mais il n'y a pas d'espoir d'obtenir une véritable ingénierie didactique sans la connaissance et le respect de ces régulations.

Par exemple, on pourrait penser que les déclarations de Dieudonné (1956) sur l'emploi de l'axiomatique d'Euclide dans l'enseignement, reprises et intégrées dans une demande de réformes plus globales, sont l'expression d'un désir du milieu scientifique et lorsque ces demandes aboutissent, on pourrait penser qu'il y a là l'indice d'une influence effective de ce milieu sur l'enseignement.

Mais on pourrait penser au contraire que l'importance de l'écart dénoncé dans ces déclarations entre les habitudes scolaires et les besoins des futurs mathématiciens est l'indice de leur indépendance naturelle: aucune tendance à importer dans l'enseignement des

questions ouvertes ou des méthodes de travail, ou des présentations synthétiques empruntées à la recherche ne recevait naturellement de rétroactions positives de la part du système même si, à l'occasion le maître et les élèves en tiraient quelques satisfactions.

Le seul recours des mathématiciens contre cette dépendance a été de faire un détour par l'opinion publique qui a momentanément accédé à leur désir: les mathématiques enseignées devaient être non seulement «vraies» mais conformes à certaines attentes épistémologiques de mathématiciens professionnels.

La façon dont cette exigence va être satisfaite et trahie montre clairement ce qui, dans l'enseignement, est relativement arbitraire, donc variable de façon assez erratique et ce qui est corrigé par les contraintes et donc stable: la disparition quasi-totale de la géométrie sous sa forme classique à un moment donné dans les programmes, celle des figures dans les manuels, ou les deux, montrent l'absence de toute nécessité locale dans ce domaine.

Par exemple, les relations des élèves avec l'espace lui-même, leur capacité à se diriger, à s'orienter à agir dans cet espace n'ont guère été affectées par ces réformes, de même semble-t-il, que leurs conceptions et leurs représentations les plus générales. On peut considérer que le fait, au demeurant assez évident, que l'enseignement ne joue presque aucun rôle dans cette acquisition (en particulier dans l'enseignement primaire), est ainsi établi.

On pourrait avancer que c'est le fait que ces acquisitions peuvent se produire naturellement qui rend inutile leur enseignement. Mais encore faudrait-il que ces acquisitions spontanées soient de qualité et assurées pour tous les enfants. Est-ce le cas? Il n'est pas facile de répondre car, pour mettre en évidence cette carence, il faut pouvoir proposer des «exercices» où clairement

les conceptions géométriques des élèves sont en jeu mais dont la réussite ne nécessite pas d'acquisitions langagières ou théoriques, ce qui est déjà une preuve de l'inadaptation.

Aussi faut-il expliquer pourquoi l'enseignement de la géométrie est-il à ce point indépendant du développement cognitif de l'enfant, comme il l'est aujourd'hui du développement de la science et pourquoi il serait assujéti essentiellement à des nécessités didactiques et culturelles.

Cette dernière assertion me paraît singulièrement étayée par les faits suivants: l'essentiel des modifications, des réformes, des débats, des travaux se fait dans le cadre d'une axiomatique déterminée (choisie par les élèves), ou porte sur le choix d'une telle axiomatique. C'est la preuve que parmi toutes les contraintes que nous avons évoquées plus haut, seules celles intervenant sur la relation maître-élève sont vraiment prises en compte dans la recherche empirique de l'amélioration de l'enseignement.

Peut-être est-ce là effectivement le seul point faible du système et peut-être est-ce la seule voie offerte à la recherche en didactique, j'en doute et la méthode que nous venons d'esquisser va permettre de poser ces questions différemment.

Mais aucune de ces modifications n'a d'effet vraiment décisif sur les phénomènes qu'elle prétend viser: la facilité de l'acquisition d'une vaste et solide culture géométrique.

En l'absence de feed-back, elles n'ont pu être vraiment adaptées aux besoins des professeurs.

La disparition momentanée de la géométrie classique dans l'enseignement français a fait apparaître, me semble-t-il, sa véritable fonction didactique.

Suite dans le prochain numéro

POLITIQUE DE RÉDACTION

Dans la politique de la revue de l'AMQ, il est clairement indiqué que les articles de fonds sont soumis à l'arbitrage. Depuis janvier 1987, ont collaboré, à titre d'arbitres, les dix-huit (18) personnes suivantes:

Richard ALLAIRE
Serge ALALOUF
Michel AUBÉ
Nadine BEDNARZ
Maurice BÉLANGER
André BOILEAU

Benoît CÔTÉ
Jean DIONNE
Maurice GARANÇON
Hélène HAYLER
Carolyn KIERANS
Raynald LACASSE

Jean-Baptiste LAPALME
Jean-Charles MORAND
Vincent PAPILLON
Pascale ROUSSEAU
Alain TAURISSON
Claude TRICOT

Ces arbitres mentionnés ci-dessus viennent des établissements suivants:

Université du Québec à Montréal (UQAM)
Université de Sherbrooke
Université Laval (Québec)

Université d'Ottawa
Collège Brébeuf (Montréal)
Université de Montréal

Nous les remercions de leur collaboration très appréciée.