Chronique: # *JEUX ET PROBLÈMES*

Jean-Marie Labrie
Université de Sherbrooke

Problème 51

Trouver deux formules différentes pour le n^e terme de la suite qui commence par les nombres 18, 6 et 2.

Monsieur Maurice Brisebois, professeur au Département de mathématiques et d'informatique de l'Université de Sherbrooke, nous a envoyé les solutions suivantes.

Suite 1. Dénotant U_1, U_2 et U_3 les trois premiers termes de cette, on peut voir que $\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{1}{3}$.

On peut donc écrire: $U_n = c(\frac{1}{3})^n$ où $n = 1, 2, 3, \ldots$ et où c est un nombre entier à déterminer.

Comme le premier terme de cette suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ est 18, on doit avoir 54 pour c. Une suite satisfaisant à la condition du problème 51 a donc la forme

$$U_n = 54\ (\tfrac{1}{3})^n \text{ avec } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Suite 2. La décroissance des trois premiers termes de cette suite peut aussi amener à chercher une solution de la forme $U_n = \frac{1}{a + bn + cn_2}$ avec a, b, et $c \in \mathbb{R}$.

En posant $v_n = \frac{1}{U_n}$, on obtient le système linéaire suivant:

$$a + b + c = \frac{1}{18}$$
$$a + 2b + 4c = \frac{1}{6}$$
$$a + 3b + 9c = \frac{1}{2}.$$

Ce système admet comme solution:

$$a = \frac{1}{6},\ b = -\frac{2}{9} \text{ et } c = \frac{1}{9}.$$

Ce qui donne: $U_n = \dfrac{1}{\frac{1}{6} - \frac{2}{9}n + \frac{1}{9}n^2}$

$$= \frac{18}{3 - 4n + 2n^2} \text{ où } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Suite 3. On peut encore obtenir une suite U_n dans la forme $\sum_{i=0}^{k} a_i n^i$ avec k entier positif supérieur ou égal à 2 et avec $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$.

En posant $k = 3$, on génère une infinité de suites paramétrées par a_3 et qui satisfont à la condition du problème. On obtient le système suivant:

$$a_0 + a_1 + a_2 = 18 - a_3$$
$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 6 - 8a_3$$
$$a_0 + 3a_1 + 9a_3 = 2 - 27a_3.$$

Ce système admet la solution:

$$a_0 = 38 - 6a_3$$
$$a_1 = 11a_3 - 24 \text{ et}$$
$$a_2 = 4 - 6a_3.$$

Exemples Si $a_3 = 0$, on a $U_n = 38 - 24n + 4n^2$
Si $a_3 = 1$, on a $U_n = 32 - 13n - 2n^2 + n^3$.

Remarque On peut également obtenir une solution paramétrée pour U_n dans la forme $U_n = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{k} a_i n^i}$ où k est encore un entier positif supérieur ou égal à 2.

Suite 4. On peut aussi obtenir une solution dans la forme $U_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}$ qui satisfait à la condition du problème pour $a = -6$, $b = 24$ et $c = 0$.

Il serait intéressant de rechercher toutes les solutions de la forme $U_n = \dfrac{\sum_{i=0}^{r} a_i n^i}{\sum_{j=0}^{s} b_j n^j}$

où $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ et r et $s \in \mathbb{N}$.

En assujetissant les coefficients de ce quotient de polynômes à prendre des valeurs spécifiées à l'avance, on retrouverait l'une ou l'autre des suites 2, 3 ou 4. En ne posant aucune condition a priori sur les coefficients en question, on engendrait possiblement d'autres solutions distinctes des précédentes.

Suite 5. Une autre solution générale peut être obtenue à partir de la construction suivante: on pose $s_n = u_n + v_n$ où v_n est une suite arbitraire et où s_n est une suite construite de telle sorte que $s_i = u_i - v_i$ avec $u_i =$ 18, 6, 2 pour $i = 1, 2, 3$ respectivement.

En posant $s_n = a_1 + (a_2 - a_1)(n - 1) + (a_3 - 2a_2 + a_1) \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ et pour a_1, a_2, a_3 réels quelconques, on obtient $s_i = a_i$ pour $i = 1, 2, 3$. La suite ainsi construite satisfait à la condition du problème. On peut en général construire une suite u_n qui admet les nombres $u_1, \ldots, u_k$ comme ses k premiers termes en posant

$$s_n = \sum_{\ell}^{k-1} \binom{n-1}{\ell} (a - 1)^{\ell} \text{ où } a^r \equiv a_{r+1}.$$

pour $r = 0, 1, \ldots, 1$.

Exemple: Pour $v_n + (\frac{1}{2})^n$ avec $n = 1, 2, \ldots$, on aura:

$$u_4 = s_4 + v_4 = \frac{111}{16}$$

pour $k = 3$ et $u_i = 18$, 6 et 2, avec $i = 1, 2, 3$ respectivement.

Remarque finale

J'ai laissé libre cours à mes fantaisies en résolvant ce problème, car la formulation me le permettait. Une formulation précise m'aurait obligé à me restreindre à une classe de solutions: suites périodiques, suites polynomiales, etc. Mais je n'aurais pas été amené à envisager des solutions aussi variées. Ce problème m'apparaît donc intéressant malgré sa formulation peu précise.

Maurice Brisebois, professeur
Université de Sherbrooke

Les personnes qui résolvent avec succès les problèmes ont habituellement à leur disposition des techniques assez simples qui les aident à résoudre la plupart des problèmes du monde réel ou scientifique. En ce sens, voici un guide dans la résolution de problèmes proposant quelques-unes de ces techniques faciles à pratiquer et à maîtriser.

A. POUR COMPRENDRE UN PROBLÈME, ESSAYER CES SUGGESTIONS:

1. LIRE SOIGNEUSEMENT le problème
2. TROUVER l'information importante
3. DÉCIDER ce qu'il faut chercher

B. POUR DÉVELOPPER UN PLAN, UTILISER QUELQUES-UNES DES IDÉES SUIVANTES:

1. ESSAYER et VÉRIFIER
2. DESSINER une figure
3. CHERCHER un patron, une régularité
4. CONSTRUIRE un modèle
5. APPLIQUER le modèle trouvé
6. UTILISER des nombres plus simples
7. ÉCRIRE une phrase numérique
8. DRESSER une liste organisée
9. ÉTABLIR une table ou une grille
10. UTILISER la logique
11. TRAVAILLER à reculons.

C. POUR VÉRIFIER LA DÉMARCHE TERMINÉE, SUIVRE LES ÉTAPES SUIVANTES:

1. S'ASSURER que toutes les informations importantes ont été utilisées
2. VÉRIFIER tous les calculs effectués
3. DÉCIDER si la réponse est plausible
4. ÉCRIRE la réponse sous la forme d'une phrase complète

Problème 52

Connaissez-vous les quadrilatères?

Construire 17 quadrilatères différents qui correspondent à l'un ou plusieurs des critères suivants:

1) Le quadrilatère est convexe ou concave
2) Le quadrilatère a un, deux ou quatre angles droits
3) Le quadrilatère a une ou deux paires de côtés parallèles
4) Le quadrilatère a un, deux ou quatre axes de symétrie (orthogonale).

Problème 53

Arrangements remarquables d'un même nombre!

a. Arranger deux «2» pour faire 24.
b. Arranger trois «2» pour faire 40 320.
c. Arranger cinq «2» pour faire 7.
d. Arranger huit «8» pour faire 1 000.
e. Arranger sept «9» pour faire 1 000.
f. Arranger huit «7» pour faire 400.

Problème 54

Les chiffres arabes!

Trouver un nombre naturel «n» dont n^3 et n^4 ensemble contiennent les dix chiffres arabes une et une seule fois.

Quelques pensées remarquables

1) Les structures mathématiques sont comme la dentelle, comme les feuilles des arbres, comme les jeux de l'ombre et de lumière sur une prairie ou sur un visage humain.

Professeur Scott Buchanam

2) Je préfère considérer les mathématiques comme un art beaucoup plus comme une science, car l'activité du mathématicien, constamment créatrice, guidée bien plus que contrôlée par le monde des sens, présente avec l'activité de l'artiste des analogies bien réelles.

Maxime Bòcher

3) Il me semble que l'esthétique dans son ensemble peut être considérée comme un système à quatre centres formant, en quelque sorte, les sommets d'un tétraèdre, à savoir l'Épique, la Musique, les Arts Plastiques et les Mathématiques.

J. J. Sylvester

4) La géométrie n'est rien si ce n'est une forme de l'art!

Julien L. Coolidge

Adresse: Jean-Marie Labrie
1431, rue Gauvin
Sherbrooke (Québec) J1K 2J2