CONCOURS MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC

(niveau secondaire)

Lauréats 1988

1er	**MARINEAU-MES, Sébastien**	**St-Alexandre, Gatineau**
2e	**OUIMET, Marie-Jo**	**St-Nom-de-Marie, Montréal**
3e	**CARBONNEAU, Mathieu**	**Mont Saint-Louis, Montréal**
4e	**JOBIN, Nicolas**	**Pères Maristes, Ste-Foy**
5e	**BISSON, Denis**	**J.-H. Leclerc, Granby**
6e	**CAUCHON, Guy**	**François-Bourrin, Beauport**
7e	**MASSON, Sébastien**	**Mont Saint-Louis, Montréal**
	MOSSOR, Bartlomiej	**Jean-de-Brébeuf, Montréal**
	BLAIS-OUELLETTE, Sébastien	**Mont-de-Lasalle, Laval**

10e	ELKOURI, Stéphane	Jean-de-Brébeuf, Montréal
	BOUCHER, Nathalie	Paul-Hubert, Rimouski
	REZA, Zadissa Mohammad	Sophie-Barrat, Montréal
	FREDERIKSEN, Andrew	Jean-de-Brébeuf, Montréal
14e	LÉVESQUE, Pascal	St-Bernard, Drummondville
	WANG, Xin-Yong	Paul Gérin-Lajoie, Montréal
	BROUILLETTE, Nancy	Paul Le Jeune, St-Tite
17e	DELORME, Jean-Sébastien	Jean-de-Brébeuf, Montréal
	BULAN, Liana	Jean XXIII, Dorval
	BEAULNE, Chantale	Mont Saint-Louis, Montréal
	BUSTROS, Katia	Ste-Marcelline, Montréal
21e	LUSSIER, Stéphane	Jean-Baptiste Meilleur, Repentigny
	LAVOIE, Jonathan	Paul Le Jeune, St-Tite
23e	MARQUIS, Patrick	Verbe Divin, Granby
	DIONNE, Jean-Philippe	Mont-de-Lasalle, Laval
	GRAVEL, Anne	Ursulines de Québec, Québec
	MARTEL, Marco	Jean-Baptiste Meilleur, Repentigny
	LIZÉE, Martin	Jean-de-Brébeuf, Montréal
	GUERTIN, Paul	Sém. de St-Hyacinthe, St-Hyacinthe
	TREMBLAY, Jacques	Séminaire de Québec, Québec
	CAISSY, Jocelyn	Antoine-Bernard, Carleton
31e	PAYNE, Christopher	St-Alexandre, Limbour
	TARDIF, Vincent	Clarétain, Victoriaville
	LAGARDE, Jean-Sébastien	Jean-de-Brébeuf, Montréal
	DUMOUCHEL, Mathieu	Jean-de-Brébeuf, Montréal
	BERGERON, Dominique	Ste-Marcelline, Montréal
	CÔTÉ, Jean-Charles	St-Maxime, Laval
	BELLEVILLE, Vicky	Paul Le Jeune, St-Tite
	GAGNON, Hervé	Petit Séminaire de Québec, Québec
	SCOTT, Nicolas	Charles-Lemoyne, Ville Ste-Catherine
	LAMARRE, Christian	Jean-de-Brébeuf, Montréal
	DUFRESNE, Marco	Mont-Sacré-Cœur, Granby
	LANGLOIS, Nathalie	St-Charles Garnier, Québec
	POTVIN, Dominique	Sém. de Sherbrooke, Sherbrooke
44e	CHOUINARD, Jérôme	Charles-Lemoyne, Ville Ste-Catherine
	PROVENCHER, François	Eudistes, Montréal
	LAUZON, Isabelle	Ste-Marcelline, Montréal
	DJEMALIAN, Carmen	Ste-Marcelline, Montréal
	DUBÉ, Danny	St-Maxime, Laval
	LAURENCE, Sylvain	Mont-de-la-Salle, Laval
	GAUTHIER, Jean-François	Curé Antoine-Labelle, Laval
	PUCELLA, Riccardo	Paul-Hubert, Rimouski
	POMMINVILLE, Serge	Des Sources, Dollard-des-Ormeaux
	CHAPDELAINE, Daniel	Du Plateau, La Malbaie
	COURTEMANCHE, Sébastien	Petit Séminaire de Québec, Québec
	SASSEVILLE, Jocelyn	M.-R.-du-Clergé, Métabetchouan
	LABERGE, Marie-Hélène	Compagnons de Cartier, Ste-Foy
57e	THIBAULT, Jean-Martin	Charles-Lemoyne, Ville Ste-Catherine
	CHARLEBOIS, Patrick	Jean-de-Brébeuf, Montréal
	CÔTÉ, Martin	St-Charles-Garnier, Québec
	TREMBLAY, Grégoire	La Pocatière, La Pocatière
	LACOMBE, Patrick	Mt St-S., St-Gabriel de Valcartier
	ANTAKI, Aline	Jean XXIII, Dorval
	BOUCHER, Pierre	La Camaradière, Duberger
	NOËL, Sylvain	Petit Séminaire de Québec, Québec
	MICHEL, Jean	St-Joseph, Trois-Rivières
66e	ST-ONGE, Vincent	Charles-Lemoyne, Ville Ste-Catherine
	PELLETIER, Danielle	Eudistes, Montréal
	GOETZ, Nathalie	Regina Assumpta, Montréal
	GIGUÈRE, Chantal	Ste-Marcelline, Montréal
	DENONCOURT, Marie-France	St-Maxime, Laval
	DUCHAINE, Martin	Curé Antoine-Labelle, Laval
	PLAMONDON, Yanick	Paul-Hubert, Rimouski
	HUOT, André	François-Bourrin, Beauport
	BOURBONNAIS, Marc	École Vaudreuil, Vaudreuil
	TREMBLAY, Catherine	Charles-Lemoyne, Ville Ste-Catherine
	DOUCET, Annie	Regina Assumpta, Montréal
	MAILLOUX, Steeve	Polyv. Normandin, Normandin
	JAUVIN, Marc	Dominique-Racine, Chicoutimi
	JUTEAU, Maloi	Polyv. Ste-Thérèse, Ste-Thérèse
	LESTAGE, Richard	Polyv. Neufchatel, Neufchatel
	VANDAL, Luc	Paul Le Jeune, St-Tite
	CORMIER, Pierre	Sém. de Chicoutimi, Chicoutimi
	MONGEAU, Daniel	Sém. de Sherbrooke, Sherbrooke
	DION, Claude	Sém. de Sherbrooke, Sherbrooke
	CAUX, Jean-Sébastien	Sém. de Sherbrooke, Sherbrooke
	MALTAIS, Louis	M.-R.-du-Clergé, Métabetchouan
	MARCOTTE, Patrick	St-Joseph, Trois-Rivières
	BARWICZ, Zbigniew	St-Joseph, Trois-Rivières
	LESAGE, Christian	Compagnons de Cartier, Ste-Foy
90e	PHAN, Nicolas	Sém. de Chicoutimi, Chicoutimi
	BRASSARD, Marc-André	Sém. de Chicoutimi, Chicoutimi
	ACHARD, Martin	Petit Séminaire de Québec, Québec
	BELLEVILLE, François	Paul Le Jeune, St-Tite
	GUILBAULT, Stéphane	Bernard-Gariépy, Tracy
	BRADETTE, Martine	Jean-Baptiste Meilleur, Repentigny
	SPERL, Martin	Mont-de-Lasalle, Laval
	DANDURAND, Frédéric	Mont Saint-Louis, Montréal
	GEOFFROY, Denis	Collège de Lévis, Lévis
	JOLIN, Pascal	La Camaradière, Duberger
	JANELLE, Éric	Sém. de Chicoutimi, Chicoutimi

CONCOURS MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC 1988

(niveau secondaire)

Le 18 février 1988 14:00 - 17:00

Le concours mathématique du Québec n'est pas un examen. Il vise à déceler les meilleurs talents en mathématiques parmi la population étudiante. Pour que ces grands talents puissent se détacher nettement de la masse des autres, le questionnaire est abondant et varié: plusieurs genres de questions et divers degrés de difficulté. Qu'un étudiant ne se décourage donc pas s'il n'arrive pas à répondre à plus de deux ou trois questions. Les auteurs du questionnaire s'attendent à ce que les bons étudiants fournissent quatre ou cinq bonnes réponses. Si vous en trouvez six, vous êtes excellent en mathématiques. Seuls quelques génies en donneront sept. Bonne chance!

QUESTIONS ET SOLUTIONS

1. Triangles de même aire

Montrer que des quatre triangles suivant lesquels un trapèze est divisé par ses diagonales, les deux qui ont pour base les côtés non parallèles ont la même aire. (Fig. I ci-contre)

Solution suggérée

Abaisser les hauteurs DH et CK, qui ont même longueur. Donc,

$$\text{aire (triangle ABD)} = \text{aire (triangle ABC)} \equiv A$$
$$\text{aire AOD} = A - \text{aire (ABO)}$$
$$\text{aire BCO} = A - \text{aire (ABO)}.$$

Ces aires sont donc égales.

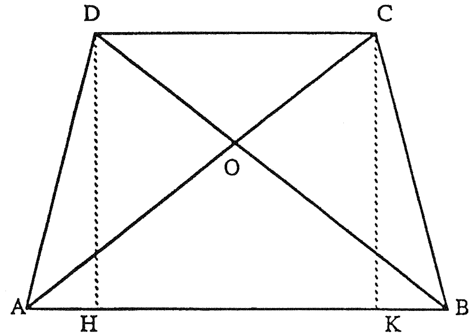


Fig. I

2. Une question d'âge

Pierre dit à Louise: «j'ai 20 ans, et j'ai deux fois l'âge que tu avais quand j'avais l'âge que tu as». Quel âge a Louise?

Solution suggérée

S'il y a Y années que Pierre avait l'âge de Louise aujourd'hui X

$$20 - Y = X \qquad \text{(i)}$$

et l'âge actuel de Pierre vaut 2 fois X-Y (âge qu'avait alors Louise):

$$20 = 2(X-Y) \qquad \text{(ii)}$$

d'où, en introduisant (i) écrit sous la forme Y = 20-X, dans (ii)

$$20 = 2(X - (20-X)) = -40 + 4X$$

$$4X = 60, \text{ et } X = 15 \text{ (et } Y = 20 - 15 = 5)$$

Louise a donc 15 ans.

3. Où est le trésor du sultan?

Ali Baba se trouve devant trois portes, derrière l'une desquelles se trouve un trésor. Le sultan lui demande de choisir une porte, sans l'ouvrir, et sachant où se trouve le trésor, il ouvre l'une des deux portes non choisies par Ali Baba pour lui montrer que le trésor n'est pas là. Il demande alors à Ali Baba s'il maintient toujours son choix original, ou s'il préfère choisir l'autre porte.

Que devrait faire Ali Baba? Justifiez votre réponse en termes de chances.

Solution suggérée

La porte choisie par Ali Baba contient le trésor avec une probabilité égale à ⅓ (un tiers), donc le trésor se trouve dans une des deux autres portes avec une probabilité égale à ⅔.

Ali Baba aurait donc intérêt à choisir la 3e porte, c'est-à-dire changer son choix original.

4. Trouvez le triangle!

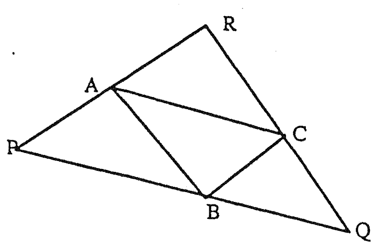
a) Étant donné 3 points A, B, C quelconques et non alignés, dans un même plan, construire un triangle PQR tel que A, B, C soient les milieux respectifs des côtés de PQR.

b) Est-il toujours possible de construire un quadrilatère PQRS dont les milieux des côtés sont 4 points donnés A, B, C, D? (Justifiez votre réponse).

Solution suggérée

a) Supposons le problème résolu. Alors A, B, C sont les milieux de RP, PQ, QR respectivement. On a alors AC//PQ, BC//PR et AB//QR, d'après les propriétés bien connues des droites des milieux des côtés d'un triangle.

La construction consiste donc à mener par chaque sommet A, B, C la parallèle au côté opposé: ces droites se coupent en les 3 sommets cherchés PQR.



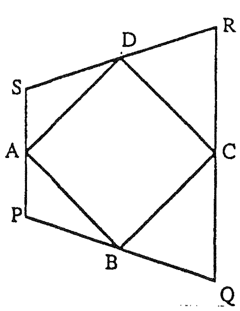
b) Supposons encore le problème résolu pour 4 points ABCD, milieux des côtés d'un quadrilatère PQRS.

On a donc $DC = \frac{1}{2}SQ$

(droite des milieux des côtés SR, QR de QRS) et de même

$$AB = \frac{1}{2}SQ$$

(droite des milieux des côtés PS, PQ de PQS).



Donc AB = DC, de même AD = BC. Le quadrilatère ABCD est donc nécessairement un parallélogramme. La construction n'est donc possible que si le quadrilatère de départ ABCD est déjà un parallélogramme.

5. La vitesse du courant

En descendant le courant d'une rivière, un bateau a une vitesse de 20 kmh, tandis qu'en le remontant, sa vitesse n'est que de 15 kmh. Pour franchir la distance de la ville A à la ville B, il met 5 heures de moins qu'en sens inverse. Quelle est la distance entre ces villes?

Solution suggérée

Soit v la vitesse absolue du bateau par rapport à un repère fixe sur le bord du fleuve, et soit V la vitesse de l'eau supposée constante tout le long de la rivière. On a alors

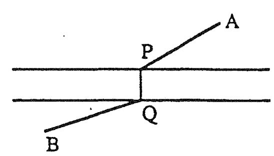
$$\begin{cases} v + V = 20 \\ v - V = 15 \\ \dfrac{x}{v - V} - \dfrac{x}{v + V} = 5h \end{cases}$$

d'où $v = 17{,}5$ kmh, $V = 2{,}5$ kmh

$$(v + V)\,x - (v - V)x = 5(v - V)\,(v + V)$$
$$2Vx = (5)\,(15)\,(20)$$
$$x = (15)\,(20) = 300 \text{ km.}$$

6. Où faut-il construire le pont?

Deux villes A et B sont situées sur les rives opposées d'une rivière de largeur constante. On veut construire un pont PQ perpendiculaire à la rivière de sorte que la distance AP + PQ + QB soit minimum.



Étant donnés une règle, un compas et une carte de cette région, comment déterminer les points P et Q sur la carte? Justifiez votre réponse.

Solution suggérée

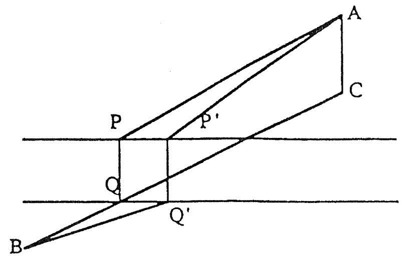
On prend C tel que AC $\perp$ la rivière et AC = largeur de la rivière.

On détermine Q, l'intersection de BC et la rive opposée de A. On mène QP//AC, avec P sur la rive de A et au bord de la rivière.

Alors, pour un point P'Q' quelconque,

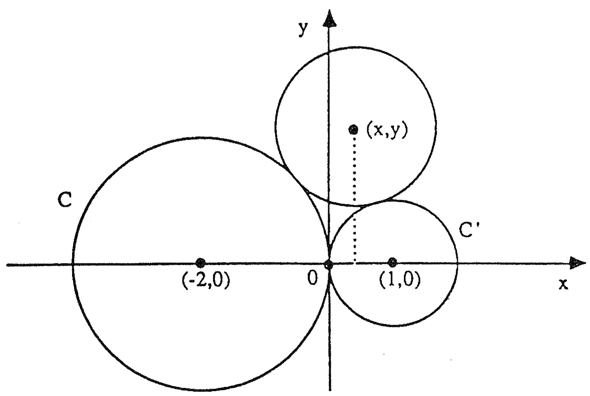
$$AP + PQ + QB = AC + CB \leq P'Q' + (AP' + Q'B) \leq P'Q' + CQ' + Q'B.$$

(Voir la figure ci-après)



7. Cercles tangents

Soit C un cercle de rayon 2 centré au point (-2,0), et C′ un cercle de rayon 1 centré au point (1,0). Il existe une infinité de cercles qui sont tangents à la fois à ces deux cercles. L'ensemble ne infinité de cercles des centres de cette famille infinie de cercles forme une courbe. Trouvez l'équation de cette courbe, et précisez si possible sa nature.



Solution suggérée

Soit A un cercle tangent à la fois à C et C′. Soit (x,y) le centre de A. Le segment reliant (x,y) à (−2,0) passe par le point de contact des cercles C et A. De même le segment reliant (x,y) à (1,0) passe par le point de contact des cercles A et C′, et le segment reliant (−2,0) à (1,0) passe par le point de contact des cercles C et C′. Cela forme le triangle ayant pour sommets les points (−2,0), (1,0) et (x,y). Abaissons un perpendiculaire du point (x,y) au côté opposé. Le théorème de Pythagore nous donne:

$y^2 = (1 + a)^2 - (1 - x)^2$ et $y^2 = (2 + a)^2 - (2 + x)^2$

où a est le rayon du cercle A. Cela donne

$$(1 - a)^2 - (1 - x)^2 = (2 + a)^2 - (2 + x)^2,$$

donc

$1^2 + 2a + a^2 - 1 + 2x - x^2 = 4 + 4a + a^2 - 4 - 4x - x^2$

d'où

$6x = 2a$, donc $a = 3x$. Nous remplaçons a par 3x dans l'équation $y^2 = (1 + a)^2 - (1 - x)^2$ pour obtenir

$$\begin{aligned} y^2 &= (1 + 3x)^2 - (1 - x)^2 \\ &= 1 + 6x + 9x^2 - 1 + 2x - x^2 \\ &= 8x^2 + 8x \end{aligned}$$

d'où, $y = \pm\, 2\sqrt{2x(x+1)}$;

cette courbe est une *hyperbole*.

FIN DU CONCOURS 1988
Niveau Secondaire