## Chronique: *JEUX ET PROBLÈMES*

**Jean-Marie Labrie**
**Université de Sherbrooke**

### Problème 45

Jacques Labelle nous écrit ce qui suit. À propos de la méthode de Monsieur Michel Gignac permettant de résoudre le problème 45, l'idée est très bonne. Voici, je crois, une façon d'expliquer pourquoi la méthode fonctionne.

*Notations:*

$N_{1,2,5,10}(x\$)$ = Nombre de façons de faire x$ avec des 1$, des 2$, des 5$, des 10$.

$N_{1,2,5}(x)$ = Nombe de façons de faire x$ seulement avec des 1$, des 2$ et des 5$ sans les 10$.

$N_{1,2}(x)$ = Nombre de façons de faire x$ seulement avec des 1$ et des 2$ sans les 5$ et sans les 10$.

$N_1(x)$ = Nombre de façons de faire x$ uniquement avec les 1$.

On peut écrire:

A) $N_1(x) = 1$ pour $x = 0, 1, 2, \ldots$

car $\underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{x \text{ fois}} = x$

est la seule manière.

Calculons $N_{1,2}(x)$ à partir de $N_1(x)$.

B) $N_{1,2}(x) = \underbrace{N_1(x)}_{0 \text{ fois } 2\$} + \underbrace{N_1(x-2)}_{1 \text{ fois } 2\$} + \underbrace{N_1(x-4)}_{2 \text{ fois } 2\$} + \ldots$

Après avoir calculé les nombres $N_{1,2}(x)$ pour $x = 0, 1, 2, \ldots$ on calcule les $N_{1,2,5}(x)$ en considérant les cas où il y a 0 fois 5$, 1 fois 5$, 2 fois 5$, ...

C) $N_{1,2,5}(x) = \underbrace{N_{1,2}(x)}_{0 \text{ fois } 5\$} + \underbrace{N_{1,2}(x-5)}_{1 \text{ fois } 5\$} + \underbrace{N_{1,2}(x-10)}_{2 \text{ fois } 5\$} + \ldots$

Après avoir trouvé la suite des nombres $N_{1,2,5}(x)$, on calcule de la même façon les $N_{1,2,5,10}(x)$ en considérant les cas où il y a

0 billet de 10$,
1 billet de 10$,
2 billets de 10$,
etc.

D) $N_{1,2,5,10}(x) = N_{1,2,5}(x - 10) + N_{1,2,5}(x - 20) + \ldots$

Maintenant, on peut établir le tableau suivant en appliquant les formules A, B, C et D.

*Rappel*

A) $N_1(x) = 1$ pour $x = 0,1,2,3, \ldots$

ce qui signifie que, si on ne dispose que des billets de 1$, il y a une seule façon de la «monnaie pour x$!

B) *Exemple:* $N_{1,2}(20) = 11$. En effet, pour faire 20$ avec des billets de 1$ ou de 2$,

on peut prendre:
20 billets de 1$ et 0 billets de 2$
18 billets de 1$ et 1 billet de 2$
16 billets de 1$ et 2 billets de 2$
etc.
2 billets de 1$ et 9 billets de 2$
1 billet de 1$ et 10 billets de 2$

En général, $N_{1,2}(x) = N_1(x) + N_1(x-2) + N_1(x-4) + \ldots$

$= 1 + \left[ \frac{x}{2} \right]$ fois

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_1(x)$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ... |
| $N_{1,2}(x)$ | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 | ... |

Pour trouver la ligne suivante pour $N_{1,2,5}(x)$, on «additionne en sautant toujours 5 crans vers la gauche» les nombres de la ligne $N_{1,2}(x)$:

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_{1,2,5}(x)$ | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 | 13 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 29 | 31 | 44 |

Pour trouver la ligne suivante pour $N_{1,2,5,10}(x)$ à partir de la ligne de $N_{1,2,5}(x)$, on additionne en sautant 10 crans:

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_{1,2,5}(x)$ | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 | 13 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 29 | 31 |
| $N_{1,2,5,10}(x)$ | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 11 | 12 | 15 | 16 | 19 | 22 | 25 | 28 | 31 | 34 | 40 | 43 |

À partir de cette méthode, il serait facile, à l'aide d'un ordinateur, de trouver les nombres des suites $N_1(x) = 1$, $N_{1,2}(x)$, $N_{1,2,5}(x)$ et $N_{1,2,5,10}(x)$ pour $x = 0,1,2,\ldots, 1\,000\,000, \ldots$

*Jacques Labelle, UQAM*

---

Veuillez adresser toute correspondance à:

Jean-Marie Labrie
2935, rue Delorme
Sherbrooke
J1K 1A2

*Méthode A*

La $100^e$ rangée possède donc $2 \times 100 - 1 = 199$ termes. Alors le $199^e$ terme de la $100^e$ rangée est le dernier terme. Or, en observant le numéro de la rangée et le dernier terme de chaque rangée, on remarque que si «n» est le numéro de la rangée, alors son dernier terme est: $n^2$

D'où, le terme recherché est $100^2$.

*Méthode B*

Soit: n: le numéro de la rangée
x: le rang du terme recherché, $1 \leq x \leq (2n-1)$
Alors pour tous les termes considérant les deux précédentes: $(n-1)^2+x$ est la générale sachant le numéro de la rangée «n» et le rang du terme recherché «x».

Donc, le $199^e$ terme de la $100^e$ rangée:
$(100-1)^2+199 = 99^2+199 = 9801+199 = 10000 = 100^2$
NB.: $(n-1)^2+x$

. rang du terme recherché
dernier terme de la rangée précédente

Christian Boily
144, rue Taschereau
St-Joseph-de-Beauce
G0S 2V0

On peut présenter la solution de la façon suivante:

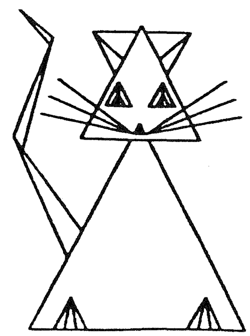
| Numéro de la rangée | $1^{er}$ nombre de la $x^e$ rangée | Forme régulière |
|---|---|---|
| 1 | 1 | $0^2 + 1$ |
| 2 | 2 | $1^2 + 1$ |
| 3 | 5 | $2^2 + 1$ |
| 4 | 10 | $3^2 + 1$ |
| 5 | 17 | $4^2 + 1$ |
| 6 | 26 | $5^2 + 1$ |
| 7 | 37 | $6^2 + 1$ |
| ... | ... | ... |
| n | | $(n - 1)^2 + 1$ |
| ... | | |
| 100 | | $99^2 + 1$ |

Donc, le $1^{er}$ nombre de la $100^e$ rangée est 9 802 et le $199^e$ nombre de cette $100^e$ rangée est 9 082 + 198 ou 10 000.

*Lise St-Pierre*
*Cégep de Baie-Comeau*

**Problème 50**

Le chat stylisé ci-dessous s'appelle MATHÉMATOU. Il est né à Sherbrooke. Il est dessiné à l'aide de triangles uniquement. Combien y a-t-il de triangles? Attention! Il est facile d'oublier certains triangles «cachés».



**Solution**

Le MATHÉMATOU est dessiné avec 46 triangles répartis comme suit:

| | |
|---|---|
| Queue: | 4 |
| Tronc et pattes: | 12 |
| Oreilles: | 6 |
| Yeux: | 12 |
| Nez et bouche: | 5 |
| Tête et moustaches: | 7 |

Quand le «père» de MATHÉMATOU parle de certains triangles cachés, fait-il allusion à ceux qu'on trouve en prolongeant certaines lignes du dessin?

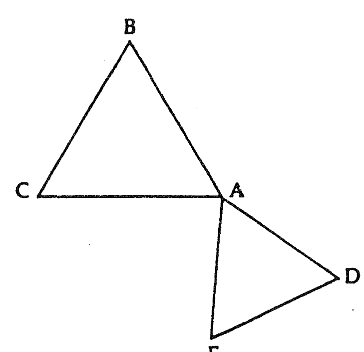
De plus, vers la fin de la queue, on pourrait trouver un autre triangle.

Je démissionne... ou mieux je donne ma langue au chat!

Lise St-Pierre
Cégep de Baie-Comeau

**Problème 49** ($2^e$ fois)
Idem (Voir le numéro de mars 1988)

Les triangles ci-dessous ABC et ADE sont équilatéraux. Prouver que m $\overline{BE}$ = m $\overline{CD}$.




**Problème 51**

Trouver deux formules différentes pour le $n^e$ terme de la suite qui commence par les nombres 18, 6 et 2.