CONCOURS DE L'AMQ DU NIVEAU COLLÉGIAL

12 février 1988

LISTE DES LAURÉATS

GAGNANTS

	NOM	COLLÈGE
1er	RENAUD PIERRE-PAUL	PETIT SÉMINAIRE DE QUÉBEC
2e	LEVERT CHARLES	BOIS-DE-BOULOGNE
3e	LIZÉE ROBERT	JEAN-DE-BRÉBEUF
4e	AUDET NICHOLAS	FRANÇOIS-XAVIER GARNEAU
5e	GIUGOVAZ LYDIA	SAINT-JEAN-SUR-RICHELIEU
6e	TREMBLAY CARL	JONQUIÈRE
7e	ZENAITIS MICHAEL	MARIANOPOLIS
8e	ARZOUMANIAN YERVANT	MARIANOPOLIS
9e	SIMONS CHRIS	MARIANOPOLIS
10e	BOURGEOIS ÉRIC	ANDRÉ-GRASSET

MENTIONS HONORABLES DANS L'ORDRE DE MÉRITE

HOUILLON STÉPHANE	STANISLAS
LEMELIN DOMINIC	CHAMPLAIN (ST-LAWRENCE)
CHARNEUX MARCO	MONTMORENCY
VEILLETTE BENOÎT	LIMOILOU
POULIOT PHILIPPE	JEAN-DE-BRÉBEUF
RUSSELL JEFFERY	MARIANOPOLIS
VASSEUR THIERRY	SAINT-JEAN-DE-RICHELIEU
CLARK CHRIS	JEAN-DE-BRÉBEUF
PORTER GARY	MARIANOPOLIS
SHEA HERBERT	STANISLAS
YRON LIONEL	STANISLAS
FRANCHOMME-FOSSE VIOLAINE	SHERBROOKE
TRUDEAU NATACHA	ANDRÉ-GRASSET
BOHOSSIAN VASKEN	MARIE-DE-FRANCE
LAVALLÉE PATRICK	AHUNTSIC
PARIS ISABELLE	BOIS-DE-BOULOGNE
COHEN SANDRA	MARIE-DE-FRANCE
FOGEL JULIAN	MARIANOPOLIS
THIBAUDEAU PIERRE	JEAN-DE-BRÉBEUF
CHÂTEAUNEUF FRANÇOIS	PETIT SÉMINAIRE DE QUÉBEC

CONCOURS MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC
(Niveau collégial)

RÉPARTITION DES 204 PARTICIPANTS
selon le niveau et le sexe

Niveau / Sexe	1	2	Non spécifié ou autre	Totaux
Masculin	79	76	5	160
Féminin	23	20	1	44

Le vendredi 12 février 1988 de 9 à 12 heures.

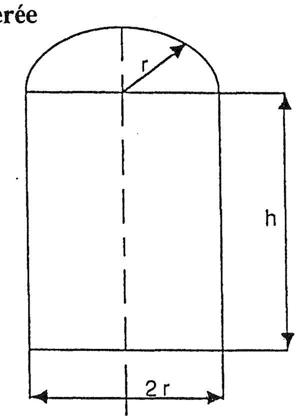
Question 1

On peut considérer qu'une fenêtre «Normande» est constitué par une feuille de verre transparent de forme rectangulaire et par une feuille de verre opaque ou teinté de forme semi-circulaire. La disposition des feuilles est illustrée dans la figure ci-contre.

La quantité de lumière qui pénètre dans une pièce à travers une fenêtre est *directement proportionnelle* à la surface vitrée de celle-ci.

En supposant que le périmètre extérieur de la fenêtre est de 10 mètres, que la largeur doit être d'au moins 3 mètres et que le verre teinté laisse passer deux fois moins de quantité de lumière que le verre transparent, on demande de trouver les dimensions de la fenêtre «Normande» qui permet de laisser passer le maximum de quantité de lumière.

Solution suggérée



La quantité Q de lumière passant à travers cette fenêtre est égale à $K(\frac{\pi r^2}{2}) + 2K(2rh)$ où K est une constante quelconque et où r, h sont liés par les relations $L = \pi r + 2h + 2r = 10$ et $2r \geq 3$, L étant le périmètre de la fenêtre. Ces deux dernières relations donnent

$$h \leq \frac{14 - 3\pi}{4} .$$

$$\text{Or } \frac{dL}{dr} = \pi + \frac{2dh}{dr} + 2 = 0 \text{ donne } \frac{dh}{dr} = -\frac{\pi + 2}{2} .$$

$$\text{D'autre part } \frac{dQ}{dr} = K\ [\pi r + 4\ (r\frac{dh}{dr} + 1 \bullet h)]$$

$$= K\ [\pi r + 4\ (h - \frac{r}{2}\ (\pi + 2))]$$

$$\text{et } \frac{dQ}{dr} = 0 \Rightarrow h = (\frac{\pi + 4}{4})\ r$$

$$= (\frac{\pi + 4}{8})\ 2r \geq (\frac{\pi + 4}{8})\ 3.$$

Comme h doit être inférieur ou égal à $\frac{14 - 3\pi}{4}$, cette valeur de h est inadmissible.

Comme

$$Q = K\ (\frac{\pi r^2}{2} + 4\ rh) = K\ [\ \frac{\pi}{2}(\frac{10 - 2h}{\pi + 2})^2 + 4\ h\ (\frac{10 - 2h}{\pi + 2})]$$

est une fonction monotone croissante de h puisque le cœfficient de h^2 vaut

$\frac{\pi}{2} \bullet \frac{4}{(\pi + 2)^2} - \frac{8}{\pi + 2}$ qui est $<$ 0), le maximum de Q

a donc lieu en

$h = \frac{14 - 3\pi}{4}$. En ce point $2r = 3$ bien sûr.

Remarque:

On peut aussi exprimer la quantité Q de lumière en fonction de r, égaler $\frac{dQ}{dr}$ à 0 et utiliser alors la condition $2r \geq 3$ afin de déterminer la valeur admissible de r qui rend Q maximum (en n'oubliant pas, bien sûr, de calculer $\frac{d^2Q}{dr^2}$ à la valeur appropriée de r).

Question 2

Un tiroir contient des bas rouges et des bas noirs. Si on sait que la probabilité de tirer deux bas rouges (tirage sans remise) est égale à ½, quel est le plus petit nombre possible de bas que contient le tiroir? Que devient ce nombre si on sait que le nombre de bas noirs est pair?

Première solution suggérée

Supposons que le tiroir contient «a» bas rouges et «b» bas noirs. Alors la probabilité de tirer deux bas rouges est donnée par $\frac{a}{a+b} \bullet \frac{a-1}{a+b-1}$.

$$\text{Donc on a: } \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)} = \frac{1}{2}$$

En réécrivant cette expression comme un polynôme en a, on obtient:

$$a^2 - (2b+1)a + b(1 - b) = 0$$

$$\text{ce qui donne } a = \frac{(2b+1) \pm \sqrt{(2b+1)^2 - 4b(1 - b)}}{2}$$

$$= \frac{(2b+1) \pm \sqrt{1+8b^2}}{2} .$$

Puisque b est supérieur ou égal à 1, alors la seule solution positive de cette équation est donc

$$a = \frac{1}{2}[(2b + 1) + \sqrt{1 + 8b^2}\,]$$

on a en effet: $b > 1 \Leftrightarrow b^2 > 1$

$$\Leftrightarrow 4b^2 > 4b$$
$$\Leftrightarrow 8b^2 > 4b^2 + 4b$$
$$\Leftrightarrow 8b^2 + 1 > (2b + 1)^2$$

Si b = 1, alors a = 3 et ainsi le plus petit nombre possible de bas vaut 4 (puisque a est une fonction monotone croissante de b!)

Comme $\sqrt{1 + 8b^2}$ n'est pas un carré parfait pour b = 2, 4 mais l'est pour b = 6 et qu'alors a = 15, le plus petit nombre de bas possible devient 21 dans le cas où b est impair.

Deuxième solution suggérée

Puisque $\frac{a}{a+b} \bullet \frac{a-1}{a+b-1} =$ et que $\frac{1}{2}$ et que $\frac{a}{a+b}$ est supérieur à $\frac{a-1}{a+b-1}$ pour $b \geq 1$, alors on peut écrire:

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 > \frac{1}{2} > \left(\frac{a-1}{a+b-1}\right)$$

i.e. $\frac{a}{a+b} > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{a-1}{a+b-1}$

i.e. $(\sqrt{2}+1)\ b+1 > a > (\sqrt{2} + 1)\ b.$

Comme b = 1 entraîne a = 3, le nombre minimum de bas est 4. Etc.

Question 3

Une certaine île, G, est habitée exclusivement par des Braves qui disent toujours la vérité et des Peureux qui mentent toujours. De plus, certains Peureux et certains Braves de l'île sont qualifiés de *reconnus.* Les habitants de l'île ont formé des *clans.* Il se peut qu'un même habitant appartienne à plusieurs clans. Étant donné un habitant X et un clan C quelconques, ou bien X se proclame membre de C, ou bien il proclame qu'il ne l'est pas. On sait que les quatre conditions suivantes sont vraies.

E_1: L'ensemble de tous les Braves reconnus forme un clan.
E_2 L'ensemble de tous les Peureux reconnus forme un clan.
C: (La condition de complémentarité): Étant donné un clan C, l'ensemble de tous les habitants de l'île qui n'en font pas partie forme un autre clan (on l'appelle le complémentaire de C et il est noté $\overline{C}$).
G: (La condition de Gödel): Étant donné un clan C quelconque, il existe au moins un des habitants de l'île qui se proclame membre de C. (Bien sûr, son affirmation peut être fausse, car c'est peut-être un Peureux).

Prouver qu'il existe au moins un Brave non reconnu sur l'île.

Solution suggérée

D'après la condition E_1, l'ensemble de tous les Braves reconnus forme un clan E. Par conséquent, d'après la condition C, l'ensemble E de tous ceux de l'île qui ne sont pas des Braves reconnus forme aussi un clan. Alors, d'après la condition G, il existe au moins une personne sur l'île qui se proclame membre du clan E, autrement dit qui n'est pas un Brave reconnu.

Or, un Peureux ne peut pas affirmer qu'il n'est pas un Brave reconnu car c'est vrai; donc ce membre de E est un Brave et puisqu'il est Brave, ce qu'il dit est vrai. Donc, ce n'est pas un Brave reconnu. Par conséquent, il y a au moins un Brave non reconnu sur l'île.

Question 4

Montrer que, si n est un entier naturel non premier et supérieur à 4, alors le produit des entiers naturels $1 \bullet 2 \ldots \bullet (n\text{-}1)$ est divisible par n.

Solution suggérée

Puisque n n'est pas premier, il existe des entiers naturels, p, q tels que n = pq avec $1 < p, q < n$. Distinguons les deux cas $p \neq q$ et $p = q$.

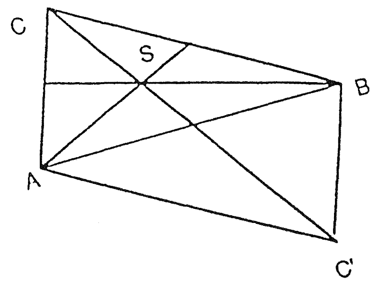
Cas 1. $p \neq q$. Ici p. q sont deux entiers naturels de la suite 1, 2, ..., n – 1 et ainsi le produit 1.2... (n – 1) est divisible par n = 1 et ainsi le produit 1.2... (n – 1) est divisible par n = pq.

Cas 2. $p = q$. Ici $n = p^2$. Alors $n > 4$ entraîne $p^2 > 4$ ou $p > 2$. Donc $n = p^2 > 2\,p$. Ainsi, p, 2p sont deux entiers naturels différents de la suite 1, 2, ..., n – 1 et conséquemment le produit 1.2. 3... (n – 1) est divisible par $p \bullet 2p = 2n$ et a fortiori par n.

Question 5

Montrer que le quotient de la somme des longueurs des médianes d'un triangle quelconque par le périmètre p de ce même triangle est compris entre $\frac{3}{4}$ et 1. On peut supposer et 1. On peut supposer connu le résultat suivant: *Dans un triangle quelconque, le point de rencontre des médianes est un point situé au deux-tiers de leurs longueurs à partir des sommets correspondants.*

Solution suggérée



(1) Soit A, B, C les sommets d'un triangle quelconque, S le point de rencontre des médianes. Si M_A, M_B, M_C dénotent des longueurs des médianes issues des sommets A, B, C respectivement et si BC = a, CA = b, AB = c, alors on peut écrire:

$AS = \frac{2}{3} M_A$, $BS = \frac{2}{3} M_B$ et $CS = \frac{2}{3} M_C$.

D'autre part, dans le triangle BSC on a:

$BS + SC > BC$ i.e. $\frac{2}{3} M_B + \frac{2}{3} M_C > a$ ou encore

$M_B + M_C > \frac{3}{2}$ a.

De même $M_A + M_C > \frac{3}{2}$ b et $M_A + M_B > \frac{3}{2}$ c.

Après addition, on obtient donc:

$2(M_A + M_B + M_C) > \frac{3}{2}$ P

et donc $\frac{M_A + M_B + M_C}{P} > \frac{3}{4}$.

(2) Soit C' le point symétrique au sommet C relativement au point milieu de côté AB. Le triangle CAC' donne:

$CA + AC' > CC'$ i.e. $b + a > 2M_C$ puisque $AC' = BC$.

Semblablement, on peut écrire: $a + c > 2M_B$ et $b + c > 2M_A$

On aura donc: $2 (a + b + c) > 2 (M_A + M_B + M_C)$

i.e. $P > M_A + M_B + M_C$

i.e. $\frac{M_A + M_B + M_C}{P} < 1.$

Question 6

a) Supposons que $[a_i, b_i]$, $1 \leq i \leq n$, n entier, sont n intervalles fermés et bornés de R tels que

(*) $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] \neq \varnothing$ pour tout i, j, $1 \leq i, j \leq n$.

Montrer qu'alors

$$\bigcap_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \neq \varnothing.$$

b) Supposons que $[a_i, b_i]$, i = 1, 2, 3,... sont des intervalles fermés et bornés de R tels que (*) est vraie pour i, j = 1, 2, 3,...

A-t-on encore

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \neq \varnothing?$$

c) Suppons que $]a_i, b_i[$, i = 1, 2, 3,... sont des intervalles ouverts de R tels que (*) est vraie pour i, j = 1, 2, 3,...

A-t-on encore

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}]a_i, b_i[\neq \varnothing?$$

Justifier à nouveau.

Solution suggérée

a) Puisque $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] \neq \varnothing$ on a: $a_i \leq b_j$ pour chaque i et chaque j.

Donc

$$\max_{1\leq i\leq n} a_i \leq 1 \min_{1\leq j\leq n} b_j$$

Prenons $x_0 \in [\max a_i, \min b_j]$. Alors il est clair que $x_0 \in [a_i, b_i]$ $\forall_i$ et donc

$$x_0 \in \bigcap_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$$

b) Oui, il suffit d'appliquer le même raisonnement qu'en a), car même

$$\max_{i\geq 1} a_i \leq \min_{j\geq 1} b_j$$

(ces quantités sont finies car $\max_{i\geq 1} a_i \leq b_1$ par exemple).

c) La réponse est non.

Prendre par exemple $]a_i, b_i[=]0, \frac{1}{i}[$ pour i= 1, 2, 3,...

alors

$]a_i, b_i[\cap]a_j, b_j[\neq \varnothing$.

(Le point $x = \frac{1}{2j}$ appartient à cette intersection

si $j \leq i$) mais il est clair que

$\bigcap_{i=1}^{\infty}]0, \frac{1}{i}[= \varnothing$; car si $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{\infty}]0, \frac{1}{i}[$ on a:

$x_0 > 0$ et $x_0 \leq \frac{1}{i}$ $\forall i$.

Donc $x_0 > 0$ et $x_0 \leq 0$. Contradiction).

Remarque:

Il était sous-entendu dans la condition (*) que i diffère de j.