JEUX ET PROBLÈMES

Jean-Marie Labrie
Université de Sherbrooke

Nous avons reçu quelques solutions pour les problèmes nos 41, 45, 46 et 47. Nous vous les proposons à votre réflexion.

Solution suggérées

Problème 41

Proposé par Monsieur Claude Casgrain

Pour la solution, on peut se référer à PISKOUNOV, Vol. I, pp. 415-416 (9e édition), pp. 429-430 (Autre édition). Dans la collection Schaum, le livre *Formules et tables de mathématiques*, on donne le développement en série de E(k), p. 179

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + 1 - 2r\cos t}\, dt = (r + 1)\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \ldots\right\} \quad \text{avec } k = \frac{2\sqrt{r}}{r + 1}$$

Cette série converge plutôt lentement pour k proche de 1.

1re solution: (Gilles Ouellet)

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + 1 - 2r\cos t}\, dt$$

Or, $-\cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2}$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + 1 + 4r\sin^2 \frac{t}{2} - 2r}\, dt$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sqrt{(r - 1)^2 + 4r\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(r - 1)^2 + 4r\sin^2 u}\, du, \text{ pour } u = \frac{t}{2}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(r - 1)^2 + 4r - 4r\cos^2 u}\, du$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(r + 1)^2 - 4r\cos^2 u}\, du, \text{ pour } u = \frac{\pi}{2} - v$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{(r + 1)^2 - 4r\sin^2 v}\, (-dv)$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(r + 1)^2 - 4r\sin^2 v}\, dv$$

$$\frac{2(r+1)}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{4r}{(r + 1)^2}\sin^2 v}\, dv$$

2e solution (Gilbert Labelle)

Soit $\cos t = 2\cos^2 \frac{t}{2} - 1$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + 1 - 2r(2\cos^2 \frac{t}{2} - 1)}\, dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sqrt{(r^2 + 2r + 1) - 4r\cos^2 \frac{t}{2}}\, dt =$$

Soit $t = \pi - \theta;\ \frac{t}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$

$$\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} \sqrt{(r + 1)^2 - 4r\sin^2 \frac{\theta}{2}}\, (-d\theta) =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sqrt{(r + 1)^2 - 4r\sin^2 \frac{\theta}{2}}\, d\theta =$$

$$\frac{1}{\pi}(r + 1)\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \frac{4r}{(r + 1)^2}\sin^2 \frac{\theta}{2}}\, d\theta =$$

$$\frac{1}{\pi}(r + 1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}\, d\phi, =$$

$$\frac{2}{\pi}(r + 1)\, E(k) \text{ où } k = \frac{2\sqrt{r}}{r + 1}$$

D'où, E(1) = 1 et pour r = 1, on a: $\frac{4}{\pi}$.

Problème 45

Je vous écris concernant le problème no 45 de vos problèmes «Jeux et problèmes». En énumérant toutes les possibilités pour quelques montants, tel que suggéré, on trouve:

31 possibilités pour 18 $ que l'on peut noter par N(18 $) = 31.
D'où, N(19 $) = 34, soit 3 de plus;
N(20 $) = 41, soit 7 de plus.

D'autres essais permettent de généraliser qu'entre 10 $ et 19 $, le nombre de possibilités par rapport au montant précédent est toujours supérieur de 3 unités, sauf pour N(11 $) et N(13 $) qui sont supérieurs d'une unité à N(10 $) et N(12 $) respectivement.

De façon symétrique, pour 20 $ à 29 $, le nombre de possibilités est supérieur de 7 unités par rapport au montant précédent, sauf pour N(21 $) et N(23 $) qui sont supérieurs de 3 par rapport à N(20 $) et N(22 $) respectivement.

Pour les montants dans la trentaine, ces écarts sont de 13, sauf pour N(31 $) et N(33 $), vous l'aurez deviné, pour lesquels les écarts sont de 7 bien sûr.

Ainsi de suite, pour la quarantaine, les écarts sont de 22;
pour la cinquantaine, ils sont de 35;
pour la soixantaine, ils sont de 53, sauf

pour les montants de 41 $, 43 $, 51 $, 53 $, 61 $ et 63 $ où les écarts sont la valeur générale de la dizaine précédente. J'ai arrêté là mes investigations, prévoyant que la valeur générale des écarts sera le terme suivant de la suite régulière: 3, 7, 13, 22, 35, 53,..., à savoir 77, pour la dizaine suivante; etc.

À partir de ces informations, on peut calculer facilement, par exemple, N(24 $):

$$\underbrace{8(1)}_{①} + \underbrace{2(1) + 8(3)}_{②} + \underbrace{2(3) + 3(7)}_{③}$$

où ① est pour les montants de 1 $ à 9 $, facile à développer;
② est pour ceux de 10 $ à 19 $;
③ est pour 21 $ et 23 $ avec des écarts de 3 et pour 20 $, 22 $ et 24 $ avec des écarts de 7.

Autres exemples:

N(24 $) = 10(1) + 10(3) + 3(7) ou 61 possibilités
N(72 $) = 10(1 + 3 + 7 + 13 + 22 + 35) +9(53) + 2(77)
= 1 441 possibilités.

Le chiffre des dizaines du montant est le plus déterminant, celui des unités permettant les ajustements finals.

Michel Gignac
463, Franklin
Québec, (Qué.)
G1K 2G8

Les nombres trapézoïdaux

par Jacques Labelle, UQAM

Ce court texte est la solution détaillée du problème n° 46 de la chronique «Jeux et problèmes» du Bulletin de l'AMQ (décembre 87), écrite par monsieur Jean-Marie Labrie.

Problème 46

a) Quels sont les nombres qui peuvent être exprimés comme une somme d'(*au moins deux*) entiers naturels consécutifs?

Rappel 1. La somme de la progression arithmétique
$a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + (a + (n - 1) d)$
(de premier terme a, de raison d et comportant n termes) est donnée par l'expression:

(1) $$\frac{1}{2} n \, (2a + (-1) \, d)$$

Preuve.

Soit $S = a + (a + d) + \ldots + (a + (n - 1) d)$
alors $S = (a + (n - 1) d) + (a + (n - 2) d) + \ldots + a$ (en inversant l'ordre)
d'où $2S = n (2a + (n - 1) d)$ (en additionnant termes à termes)
et (1) s'ensuit.

Rappel 2. Le cas très particulier de (1), où a = d = 1, donne la somme des i premiers entiers naturels (noté Δ_i et appelé le $i^{ème}$-nombre triangulaire):

(2) $$\Delta_i = 1 + 2 + \ldots + i = \frac{i(i + 1)}{2}$$

Il est amusant et classique de «voir» (2) géométriquement comme suit:

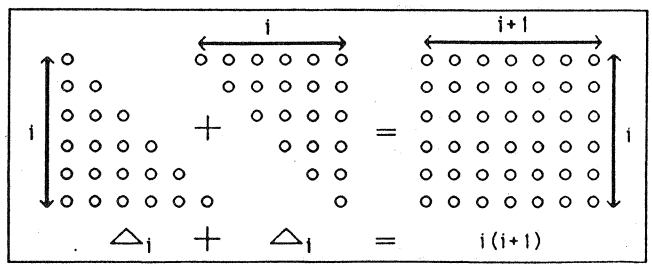


Tableau 1

Soit N la somme des n entiers consécutifs commençant par m + 1:

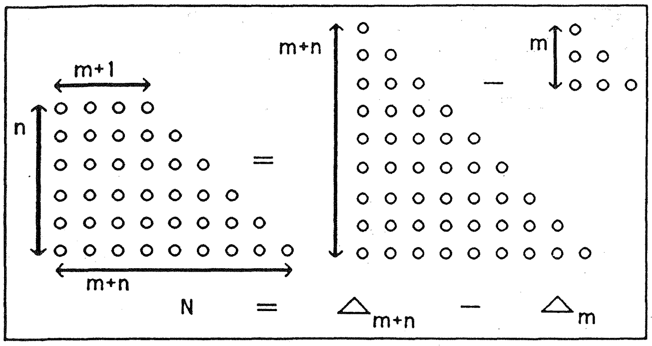
$$N = (m + 1) + (m + 2) + \ldots + (m + n).$$

Proposition 1. On a $N = \frac{1}{2} n(n + 2m + 1)$.

Preuve (1):
Utiliser la formule (1) avec a = m + 1 et d = 1.

Preuve (2)
On a (voir fig. 2)

$$N = \Delta_{m+n} - \Delta_m = \frac{(m + n)(m + n + 1)}{2} - \frac{m(m + 1)}{2}$$
$$= \frac{1}{2} (n^2 + 2mn + n) = \frac{1}{2} n(n + 2m + 1)$$

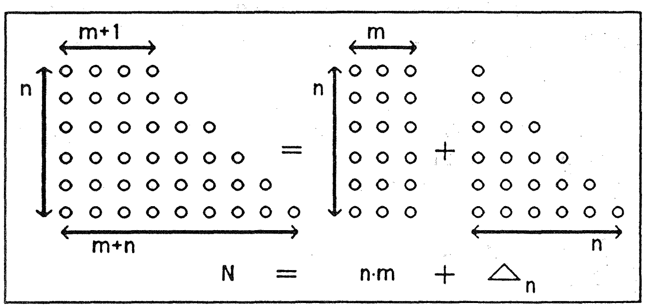


(Fig. 2)

Preuve (3):

On a (voir fig. 3)

$$N = nm + \Delta_n = nm + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2}(n + 2m + 1)$$



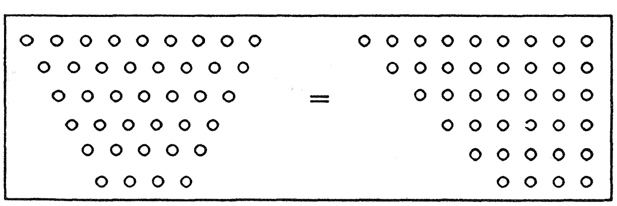
(Fig. 3)

Preuve (4):

Si on diminue de 1 chacun des n entiers consécutifs et ceci m fois, on tombe sur

$1 + 2 + \ldots + n = \Delta_n$; d'où encore $N = nm + \Delta_n$.

Remarque 1. N peut être appelé un nombre *rectangulo-triangulaire* ou *triangulo-rectangulaire* (fig. 3) ou *différence de deux nombres triangulaires* ou *triangulaire tronqué* (fig. 2). Nous trouvons cependant plus joli de dire ***trapézoïdal***:



(Fig. 4)

Remarque 2. Les nombres trapézoïdaux de hauteur n ($n \geq 1$) sont donc formés de n étages de «points»; chaque étage comprenant un point de plus que le précédent. Par la proposition 1, on sait qu'ils sont de la forme $\Delta_n + nm$ où $m \geq 0$. Pour $n = 1$, ils comprennent tous les entiers naturels, i.e. tout entier est somme d'un entier consécutif! Cependant on veut ici $n \geq 2$ car nous nous intéressons aux entiers somme *d'au moins deux* entiers consécutifs.

Problème 46

b) Existe-t-il des nombres qui ne peuvent pas être exprimés comme une somme d'(au moins deux) entiers naturels consécutifs? Si oui, quels sont-ils?

Comme nous avons l'expression

$$\Delta_n + nm = \frac{1}{2} n(n + 2m + 1), \ n \geq 2, \ m \geq 0,$$

pour ces nombres, ceci ne devrait pas poser trop de problèmes.

Une première approche est d'employer une méthode genre «crible d'Eratosthène». De la liste 1, 2, 3,... de tous les entiers naturels, rayons (i.e. enlevons) les termes de la progression arithmétique (voir tableau qui suit):

$3 = \Delta_2, \Delta_2 + 2, \Delta_2 + 4, \ldots$

(il s'agit des entiers impairs 3, 5, 7,... qui sont somme de deux entiers consécutifs car

$(m + 1) + (m + 2) = 3 + 2m, \ m \geq 0$);

rayons ensuite les termes de la progression arithmétique:

$6 = \Delta_3, \Delta_3 + 3, \Delta_3 + 6, \Delta_3 = 9, \ldots$;

puis, $10 = \Delta_4, \Delta_3 + 4, \Delta_4 + 8, \ldots$; et ainsi de suite...

On constate (expérimentalement) que les seuls entiers restant sont: 1, 2, 4, 8, 16,...; i.e. les puissances de deux. Nous prouverons ceci rigoureusement plus loin en utilisant plutôt l'expression:

$\frac{1}{2} n(n + 2m + 1), \ n \geq 2, \ m \geq 0$, donnée par la proposition 1.

Tableau

1	2	~~3~~	4	~~5~~	~~6~~	~~7~~	8	~~9~~	~~10~~
~~11~~	~~12~~	~~13~~	~~14~~	~~15~~	16	~~17~~	~~18~~	~~19~~	~~20~~
~~21~~	~~22~~	~~23~~	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	~~29~~	~~30~~
~~31~~	32	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	~~37~~	~~38~~	~~39~~	~~40~~
~~41~~	~~42~~	~~43~~	~~44~~	~~45~~	~~46~~	~~47~~	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	~~53~~	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	~~59~~	~~60~~
~~61~~	~~62~~	~~63~~	64	~~65~~	~~66~~	~~67~~	~~68~~	~~69~~	~~70~~
~~71~~	~~72~~	~~73~~	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	~~79~~	~~80~~
~~81~~	~~82~~	~~83~~	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	~~89~~	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	~~97~~	~~98~~	~~99~~	~~100~~

.....

Remarque 3. Dans le tableau, l'entier 100 est rayé pour la première fois lorsqu'on enlève la progression arithmétique:

$15 = \Delta_5, \Delta_5 + 5, \ldots$

C'est donc dire que 100 est somme de 5 entiers consécutifs (mais pas moins):

$100 = 18 + 19 + 20 + 21 + 22.$

Remarque 4. Tout nombre de la forme

$$\frac{1}{2}\,n(n+ 2m + 1),\ n \geq 2,\ m \geq 0,$$

admet un facteur impair plus grand que un. En effet, si $n = 2k$ est pair, on a $k(2k + 2m + 1)$ et $2(k + m) + 1$ est le facteur impair cherché; si
$n = 2k + 1$ est impair alors
$\frac{1}{2}(2k + 1)(2k + 2m + 2) = (2k + 1)(k + m + 1)$ et $2k + 1$ est le facteur impair cherché.

Proposition 2. Les nombres ne pouvant pas s'exprimer comme somme d'au moins deux entiers consécutifs sont précisément les puissances de deux.

Preuve. Il suffit de prouver la réciproque de la remarque 4 (car les puissances de deux sont exactement les entiers naturels n'admettant aucun facteur entier impair > 1).

Soit $N = (2k + 1)\,\ell$ avec $k \geq 1$ et $\ell \geq 1$).
Si $\ell > k$, alors $N = \frac{1}{2}\,n(n + 2m + 1)$ avec $m = \ell - 1 \geq 0$ et $n = 2k + 1 \geq 3$. Si $\ell \leq k$, alors $N = \frac{1}{2}\,n(n + 2m + 1)$ avec $m = \ell - k - 1 \geq 0$ et $n = 2k + 1 \geq 3$.
Si $\ell \leq k$, alors $N = \frac{1}{2}\,n(n + 2m + 1)$ avec $n = 2\ell \geq 2$ et $m = k - \ell \geq 0$.

Dans tous les cas, N est somme d'au moins deux entiers consécutifs.

Remarque 5. Certains entiers (ceux admettant plusieurs diviseurs impairs) peuvent s'écrire de plusieurs façons comme somme d'entiers consécutifs; par exemple $45 = 3^2 \cdot 5$ peut s'écrire:

$$\begin{aligned}45 &= 22 + 23 = 14 + 15 + 16\\ &= 7 + 8 + 9 + 10 + 11\\ &= 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10\\ &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9\end{aligned}$$

c) Quel est le nom de tous les nombres qui peuvent s'exprimer comme la somme de n nombres naturels consécutifs? Trouver une expression algébrique qui permet de les engendrer.

Réponse récapitulative. Ce sont les nombres de la progression arithmétique de premier terme

$$\Delta_n = \frac{1}{2}\,n(n + 1) \text{ et de raison } n:$$

$$\Delta_n,\ \Delta_n + n,\ \Delta_n + 2n, \ldots,\ \Delta_n + mn, \ldots,.$$

Pour $n = 1$, il s'agit de tous les entiers; pour $n = 2$, ce sont les nombres impairs (≥ 3); pour $n = 3$, ce sont les multiples de 3 (≥ 6); etc. On peut les appeler: triangulo-rectangulaires, rectangulo-triangulaires, différence de deux nombres riangulaires, triangulaires-tronqué ou trapézoïdaux d'hauteur n suivant la façon que l'on choisit de les «dessiner» (voir remarque 1). Il n'y a pas de réponse unique car celle-ci dépend de notre bon goût mais trapézoïdaux est le plus joli.

Autres questions.

d) Pour un entier N donné, de combien de façons distinctes peut-on l'écrire comme somme d'entiers consécutifs (voir remarque 5)? Parmi celles-ci laquelle utilise le plus d'entiers consécutifs?

e) Quels entiers peuvent s'écrire comme somme de nombres pairs (respectivement; nombres impairs, carrés parfaits, cubes parfaits, nombres triangulaires) consécutifs?

f) Quels entiers peuvent s'écrire comme produit d'entiers consécutifs?

Problème 47

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4}$$

1) On a: $\frac{1}{8} = \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24}$

$= \frac{1}{24} + \frac{1}{12}$ (Regroupement pair)

$= \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{n_2}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{n_4}\right)$

(32 et 16: multiple de 8)
Prendre 32 plus grand que 24 et 16 plus grand que 12!

$= \frac{1}{32} + \frac{1}{96} + \frac{1}{16} + \frac{1}{48}$

2) $\frac{1}{8} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$

$= \frac{1}{16} + \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{32} \right)$

$= \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{n_4} \right)$

(40 multiple de 8 et
40 est plus grand que 32)

$= \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{40} + \frac{1}{160}$

Noëlange Boisclair
Collège Montmorency
475, boul. de l'Avenir
Laval H7N 5H9
Tél.: 667-5510

Bien que basée sur l'intuition plus que sur des règles mathématiques, la solution que je propose m'a permis de trouver une somme de 4 fractions unitaires différentes égale à $\frac{1}{8}$.

Posons $\frac{1}{8} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$

Les numérateurs sont 1111. Mais, en binaire, le nombre 1111 représente $(8 + 4 + 2 + 1)_{10}$ ou 15_{10}

Remplaçons $\frac{1}{8}$ par $\frac{15}{120}$

D'où, $\frac{1}{8} = \frac{8}{8a} + \frac{4}{4a} + \frac{2}{2c} + \frac{1}{d}$

$= \frac{8}{120} + \frac{4}{120} + \frac{2}{120} + \frac{1}{120}$

Ce qui donne: a = 15, b = 30, c = 60 et d = 120.

donc, $\frac{1}{8} = \frac{1}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \frac{1}{120}$

Camille Levasseur
4, rue des Peupliers
Rivière-du-Loup G5R 4B9

Problème 47

1^re^ solution

Cherchons à exprimer $\frac{1}{8}$ sous la forme $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$

avec $p \neq q$ (p et q dans Z)

On a: $\frac{1}{8} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ ou $\frac{p+q}{pq}$

D'où, $pq = 8p + 8q$

$$q = \frac{8p}{p-8} \quad (*)$$

Il suffit ici de considérer les valeurs entières de p inférieures à 16 car le cas p = 16 donne une décomposition en deux fractions identiques et les valeurs de p supérieures à 16 redonnent les solutions déjà obtenues précédemment. Cette équation admet des solutions entières positives différentes pour p = 9, 10, 12 auxquelles correspondent les valeurs 72, 40, 24 pour q. On forme alors des décompositions de la fraction $\frac{1}{8}$ avec 4 éléments unitaires en posant:

$$\frac{1}{8} = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i}\right) + \frac{(\beta - \alpha)}{\beta}\left(\frac{1}{p_j} + \frac{1}{q_j}\right)$$

où (p_i, q_i) et (p_j, q_j) sont des solutions quelconques de l'équation (*) et où α est le PGCD de p_i, q_i et $(\beta - \alpha)$ est le PGCD de p_j, q_j avec α, β dans Z^+.

Exemples:

1. $\frac{1}{8} = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{24}\right) + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{40}\right)$

$= \frac{1}{20} + \frac{1}{25} + \frac{1}{40} + \frac{1}{100}$

2. $\frac{1}{8} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{40}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{24}\right)$

$= \frac{1}{20} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80}$

2^e^ solution:

On peut également utiliser la notion de nombre parfait pour résoudre ce problème. Je rappelle qu'un nombre est dit *parfait* s'il est égal à la somme de ses diviseurs propres, c'est-à-dire de tous ses diviseurs à l'exclusion de lui-même. Il se trouve que le plus petit nombre parfait est 6 et que le nombre de ses diviseurs propres est 3.

On peut alors écrire: $6 + 6 = 12 = 6 + 3 + 2 + 1$

$$1 = \frac{6+3+2+1}{12}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$$

D'où, $\frac{1}{8} = \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{48} + \frac{1}{96}$

Remarque

1. Si l'on désire exprimer une fraction unitaire quelconque comme une somme de K ($K > 2$) fractions unitaires différentes quelconques où K n'est pas fixé à priori, on peut générer une telle décomposition à partir des décompositions unitaires à 2 éléments de cette fraction. Par exemple, la fraction unitaire $\frac{1}{8}$ peut s'écrire comme suit:

   $\frac{1}{8} = \frac{1}{10} + \frac{1}{40}$ ou $(\frac{1}{15} + \frac{1}{30}) + \frac{1}{40}$

   On utilise le même procédé de construction pour la fraction $\frac{1}{40}$.

2. En général, prenant des décompositions à «s» et à «t» éléments, on générera assez souvent une décomposition à «s + t» éléments (Il est possible qu'une fraction de la 1^re^ décomposition se retrouve dans la 2^e^ décomposition ou dans une décomposition ultérieure!). J'ignore s'il est possible de construire une décomposition à K éléments pour K quelconque fixé à l'avance. J'ignore également s'il existe une formule donnant le nombre de décompositions à K éléments pour une fraction unitaire donnée.

Maurice Brisebois, prof.
Départ. Math. et Inf.
Univ. de Sherbrooke

Nous vous proposons trois nouveaux problèmes.

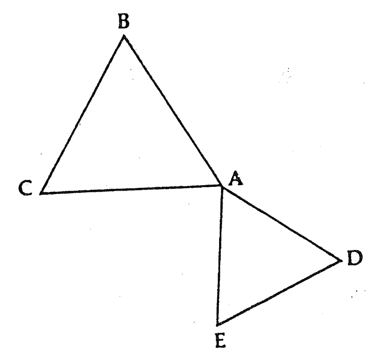
Problème 48

Quel est le 199e terme de la 100e rangée de la figure des nombres suivants sous forme triangulaire?

```
            1
         2  3  4
      5  6  7  8  9
  10 11 12 13 14 15 16
           ...
```

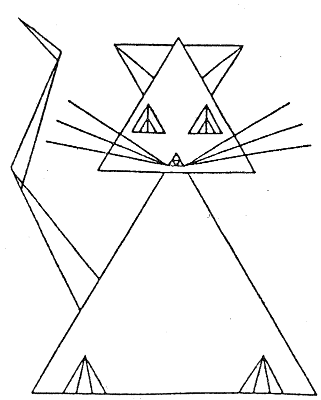
Problème 49

Les triangles ci-dessous ABC et ADE sont équilatéraux. Prouver que m $\overline{BC}$ = m $\overline{CD}$.



Problème 50

Le chat stylisé ci-dessous s'appelle MATHÉMATOU. Il est né à Sherbrooke. Il est dessiné à l'aide de triangles uniquement. Combien y a-t-il de triangles? Attention! Il est facile d'oublier certains triangles «cachés».



Adresse: Jean-Marie Labrie
2935, rue Delorme
Sherbrooke
J1K 1A2