Louis Charbonneau
Dépt Math. et Inf., UQAM

FONCTION (II): UN PERSONNAGE EN QUÊTE D'AUTEUR
Le XVIIIe siècle

Lorsque j'étais adolescent, j'avais toujours plaisir à venir à Montréal avec mes confrères étudiants pour assister aux représentations de la Nouvelle Compagnie Théâtrale qui jouait alors au théâtre du Gésu. L'une des pièces dont j'ai gardé le souvenir le plus clair est *Six personnages en quête d'auteur* de Pirandello. Cette pièce illustre ce que tout écrivain constate, l'indépendance des personnages qu'il a pourtant créés. En effet, dans tout roman, dans toute pièce de théâtre, du moment qu'un personnage est créé, sa personnalité se précise, ses actions se trouvent imbibées d'une logique propre que l'auteur ne saurait transgresser sans affaiblir, par la gratuité des comportements, toute la structure de son œuvre.

Un phénomène similaire, mais beaucoup plus serré, existe dans cette grande œuvre qu'est l'histoire des mathématiques. L'auteur, c'est l'ensemble des mathématiciens qui jalonnent l'histoire[1]. Les personnages sont ici les objets mathématiques qui, une fois créés, obéissent à une logique beaucoup plus implacable que celle des personnages de roman ou de théâtre. De fait, cette logique tellement coercitive amène l'auteur vers une précision toujours plus grande de la personnalité des personnages-objets.

Prenons un exemple bien connu, la notion de nombre et plus particulièrement l'extension de cette notion aux «nombres» complexes. Les propriétés des nombres, sublimées en algèbre sous forme de règles de manipulation des équations, permettent de résoudre sans trop de problèmes les équations du premier et du second degré. À la Renaissance, des règles pour résoudre les équations du troisième degré sont mises au point. Jérôme Cardan, tentant de résoudre, à l'aide de ces règles, une certaine équation du troisième degré, se voit obligé de calculer avec des expressions symboliques de la forme (notation moderne) $5 + \sqrt{-15}$ et $5 - \sqrt{-15}$ qui semblaient alors dénuées de sens. Et pourtant, les racines obtenues à la fin du processus sont, elles, tout à fait acceptables. Le personnage nombre vient d'obliger l'auteur-mathématicien à prendre conscience d'une face jusqu'alors cachée de sa personnalité. Reste maintenant à l'auteur d'accepter cette intrusion. Il en prendra près de quatre siècles. En fait, il faudra interpréter géométriquement les nombres complexes pour leur permettre de prendre place de plein pied comme *nombres.* Notons toutefois que cela n'a pas empêché les mathématiciens du XVIIIe siècle d'employer ces nombres régulièrement. Qu'il suffise de mentionner la formule fondamentale $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ qui date de cette époque. Ajoutons de plus que la reconnaissance, en tant que nombres, des nombres complexes et aussi des nombres négatifs, s'est manifestée par la reconnaissance de ceux-ci comme racines acceptables d'équations algébriques.

On peut, à la lumière de cet exemple et en simplifiant à outrance, diviser la révélation de la nouvelle facette de la personnalité du personnage mathématique *i* en deux étapes. D'abord la prise de conscience de l'existence même de cette facette, ici, par la mise en évidence, suite à des manipulations formelles, des symboles $\sqrt{-n}$, où n est un réel positif. Ensuite, la légitimisation de $\sqrt{-n}$ et son intégration par l'auteur-mathématicien à ce qui était antérieurement connu de la personnalité du nombre. Alors que la première étape est instantanée (considérant bien sûr qu'il faille un terrain fertile), la seconde est beaucoup plus longue, car elle implique une familiarisation avec le nouvel élément. Or pour l'apprivoiser, il faut le réinterpréter en des termes déjà familiers. C'est pourquoi il ne faut pas se surprendre de ce que l'acceptation des nombres complexes au XIXe siècle fut tributaire de leur représentation géométrique ainsi que de leur interprétation physique, en électricité par exemple.

Le personnage-fonction dont nous avons brièvement regardé la préhistoire dans la chronique précédente a connu une évolution similaire. Je dis préhistoire car avant Leibniz et Daniel Bernoulli, puisqu'aucun mot n'est associé à la fonction, le personnage-fonction n'existe qu'à l'état embryonnaire. Ici et là, de bribes de personnalité se manifestent, mais elles ne s'unissent pas sous une même ombrelle, elles ne font pas corps.

Dans la dernière chronique, nous avons vu comment la loi de correspondance d'une fonction avait été exprimée de diverses façons depuis les Grecs jusqu'au début du XVIIIe siècle. D'abord chez Apollonius dans un langage basé sur les rapports, puis chez Oresme et Galilée par une comparaison de phénomènes. Dans ces cas, le traitement de la relation fonctionnelle ne fait l'objet d'aucune systématisation où des automatismes précis auraient permis l'apparition «automatique» de cas frontières. Chez Descartes, cette situation se modifie par l'introduction en géométrie des méthodes et des algorithmes de calcul de l'algèbre. Son domaine de référence reste toutefois la géométrie, ce qu'exprime bien le fait qu'il parle uniquement de courbes et qu'il ne sent pas le besoin d'employer un terme plus général. Sa vision algébrique l'oblige de restreindre aux seules courbes qu'il nomme géométriques (c'est-à-dire exprimables au moyen des 4 opérations élémentaires et de l'extraction des racines) celles qui font partie du domaine mathématique. Ce qui manque à Descartes, ce sont des processus dans lesquels les fonctions entreraient globalement, en soi. Or le calcul différentiel et intégral repose sur de tels processus. Aussi, est-il normal que ce furent Leibniz et Bernoulli qui sentirent le besoin de nommer cet élément de base du nouveau calcul. De même que les nombres négatifs et complexes se manifestèrent dans le cadre de la résolution d'équations, où ce que l'on cherchait est précisément un nombre satisfaisant une propriété précise, de même, c'est en cherchant à trouver une fonction, qui satisfasse une propriété précise, que la personnalité du personnage-fonction se manifestera. Ces propriétés prendront à partir du XVII^e siècle la forme d'équations aux dérivées partielles.

En algèbre, la possibilité qu'on puisse énoncer un théorème aussi simple et beau que «Une équation de degré *n* a *n* racines» induisait les mathématiciens à accepter les nombres négatifs et complexes comme nombres à part entière. Pour les équations aux dérivées partielles, un phénomène analogue jouera un rôle fondamental, celui de la détermination d'une fonction — expression symbolique — qui non seulement satisfasse l'équation mais aussi soit la plus générale possible. C'est dans le sens donné au mot *général* que repose l'histoire de la notion de fonction au XVIII^e et au début du XIX^e siècle. C'est ce que nous verrons maintenant.

EULER: Introduction in Analysin Infinitorum (1748)

L'un des grands moments de l'analyse infinitésimale est la publication en 1748, quelques années après sa rédaction, du célèbre traité d'Euler *Introduction in Analysin Infinitorum.* Ce magistral ouvrage marque de fait le début du calcul différentiel et intégral tel que nous le connaissons aujourd'hui. C'est par exemple dans celui-ci que le logarithme est défini comme l'inverse de l'exponentiation et que les fonctions trigonométriques sont abordées comme des rapports. Là aussi, dans la tradition de Leibniz et de Bernoulli, la fonction devient vraiment et pour de bon le concept clé du calcul.

Dès le début du chapitre premier du livre premier, Euler, après avoir défini quantité constante et quantité variable, définit la fonction (définition 4)[2]:

> Une fonction d'une quantité variable est une expression analytique composée d'une manière quelconque de cette quantité variable et de nombres ou de quantités constantes.

On remarque que cette définition correspond presqu'exactement à celle donnée par Jean Bernoulli en 1718 (Voir la chronique de mai 1987) si ce n'est que le mot «quantité» de Bernoulli a été remplacé par «expression analytique». Le sens de ces termes se trouve clarifié quelques paragraphes plus loin lorsqu'Euler souligne que les opérations admissibles dans ces expressions analytiques sont non seulement les 4 opérations élémentaires auxquelles s'ajoutent l'extraction des racines, mais aussi les opérations transcendantes telles que l'exponentielle, le logarithme, et «d'innombrables autres, que fournit le Calcul intégral» (autrement dit les équations différentielles)[3]. Les fonctions sont donc avant tout des expressions symboliques. De là, il semble que l'on puisse inférer qu'à deux expressions différentes correspondent deux fonctions différentes. Or, cela n'est clairement pas le cas, comme par exemple lorsque l'on fait un changement de variable, et Dieu sait l'importance de ce procédé dans la résolution des équations différentielles. À mesure qu'il avance dans son traité, Euler devient très conscient de cela et distingue clairement la fonction en tant que telle; et une «expression analytique» qui la représente. Néanmoins, ce lien entre fonction et sa représentation comporte une zone grise, en l'occurrence la partie de ce que nous appelons le domaine de définition sur lequel l'expression analytique représente effectivement la fonction. Euler divise les fonctions en deux groupes, les fonctions *continues* qui sont celles dont l'«expression analytique» décrit exactement le lien fonctionnel sur tout $\mathbb{R}$, et les fonctions *discontinues* ou *mixtes* (ou *mécaniques* ou *irrégulières*) qui sont celles représentées par une «expression analytique» sur un intervalle et une autre sur un autre intervalle, autrement dit qui sont continues (au sens d'Euler) par morceaux. En fait, Euler, comme tous ses contemporains, croit que toute fonction est développable en séries entières

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$$

sauf peut-être en un nombre fini de points[4]. Cette conception découle entre autres de ce qu'on pensait que toute équation algébrique est résoluble par radicaux. Puisque la loi de correspondance a dans les faits une forme bien particulière, on voit que la notion eulérienne de fonction est beaucoup plus restrictive que la nôtre.

La controverse de la corde vibrante (1747-1750)

La complexité de la personnalité du personnage-fonction se révélera particulièrement dans la controverse de la corde vibrante qui opposa au milieu du XVIII^e siècle D'Alambert, Euler, Daniel Bernoulli, puis plus tard Lagrange, en somme une brochette des meilleurs mathématiciens de l'époque.

L'étude de la vibration d'une corde vibrant entre deux points d'attache a débuté dès 1728 avec les travaux de Jean Bernoulli (1667-1748), qui avait abordé le problème en le discrétisant. Ce fut toutefois Jean le Rond D'Alembert qui le premier en donna en 1747 une solution à partir d'une analyse continue du phénomène. Il obtient alors l'équation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

avec les conditions aux bornes suivantes:

$y(0, t) = 0$ (attache à gauche reste immobile);
$y(\ell, t) = 0$ (attache à droite reste immobile);
$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t}(x = 0) = 0$ (la corde est en repos au départ)
$y(x, 0) = f(x)$ (au départ $[t = 0]$ la forme de la corde est donnée par $f(x)$).

De là, D'Alembert déduit la forme d'une solution. Néanmoins, la question surgit de savoir si la solution qu'il propose est la plus générale possible. Autrement dit, la solution de D'Alembert convient-elle à toutes les formes que pourrait prendre la corde au temps zéro? En fait, l'auteur souligne les conditions que doit satisfaire f pour que sa méthode s'applique: 1) la courbe f doit être deux fois différentiable, comme l'équation aux dérivées partielles; 2) f doit être périodique, de période 2ℓ; 3) f doit être continu au sens d'Euler, c'est-à-dire représentable sur tout $\mathbb{R}$ par une seule expression symbolique.

En 1749, Euler reprend l'étude de D'Alembert, mais refuse de se limiter aux fonctions satisfaisant les conditions énoncées. Alors que D'Alembert se fixait sur l'expression symbolique d'une fonction, en confondant de fait la fonction et son expression, Euler, fort de l'évolution déjà perceptible vers la fin de son *Introductio,* aborde la question en considérant la courbe que forme la corde au temps initial[5].

> ... la première vibration dépend de notre bon plaisir, puisqu'on peut, avant de lâcher la corde, lui donner une figure quelconque...

Il peut donc considérer des «courbes anguiformes, soit régulières, contenues dans une certaine équation, soit irrégulières ou mécaniques». On perçoit ici une nette évolution dans la pensée d'Euler par rapport à la définition de fonction donnée en 1748 au début de son *Introductio.* Euler, dans ce cas, mais plus généralement dans le domaine de la résolution des équations aux dérivées partielles, évolue vers une vision plus large des fonctions traitables mathématiquement. Malgré tout, certaines restrictions demeurent. Cela apparaît dans sa réaction au mémoire de Daniel Bernoulli présenté à l'Académie de Berlin en 1763. Dans ce mémoire, l'auteur propose la solution

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{\ell} \cos \frac{\pi c t}{\ell} + \beta \sin \frac{2\pi x}{\ell} \cos \frac{2\pi c t}{\ell} + \ldots$$

en considérant que chaque terme de la série représente une harmonique de la corde et que la solution représente la somme, éventuellement infinie, de toutes les harmoniques possibles. De là, il déduit qu'au départ la forme de la corde est représentée par

$$f(x) = \alpha \sin \frac{\pi x}{\ell} + \beta \sin \frac{2\pi x}{\ell} + \ldots$$

Quelle que soit la position de la corde au départ, elle est donc continue (au sens d'Euler), car représentable par une expression analytique unique. Toutefois, Bernoulli ne sait pas comment déterminer les valeurs des coefficients α, β, ... mais il suppose que si on savait comment faire la série on aurait la généralité d'une série entière.

Euler répondit immédiatement à Bernoulli en soutenant que, puisque les termes de la série sont tous des fonctions sinus, elles sont impaires et périodiques de période 2ℓ, ces propriétés doivent être transférées à la fonction représentée. Or, à l'époque, on croyait que si deux expressions symboliques sont égales sur un intervalle, elles le sont partout. Toutefois il existe des fonctions algébriques qui satisfont les conditions aux bornes, mais qui ne sont clairement pas impaires et périodiques. La solution de Bernoulli ne peut donc selon Euler être générale.

Euler, Institutiones calculi differentialis (1755)

Alors qu'Euler participe à la controverse de la corde vibrante, il publie son magistral *Institutiones calculi differentialis* (1755). Il y donne une définition de fonctions beaucoup plus ontologiques que symboliques[6]:

> Si des quantités dépendent d'autres quantités de telle sorte que si les premières sont modifiées les secondes sont aussi modifiées, alors les dernières quantités sont appelées fonctions des premières. Cette appellation est de nature la plus large et comprend toute méthode par laquelle une quantité peut être déterminée par d'autres. Si donc, x dénote une quantité variable, alors toutes les quantités qui dépendent de x d'une quelconque façon ou sont déterminées par elles sont appelées fonctions de celles-ci.

Une constante n'est pas une fonction dans ce sens. On voit clairement ici l'influence de la controverse de la corde vibrante sur la pensée d'Euler. En 1748, il est parti d'une définition où la fonction est une expression symbolique calculable; il en vient en 1755 à une définition où la fonction est une quantité variable dont la caractéristique est simplement de dépendre d'autres quantités.

La nature du problème de la corde vibrante imposait que la fonction donnant la position initiale soit nécessairement continue. Si la corde est coupée (ce qui permettrait d'avoir une fonction à l'origine discontinue), il n'y aurait pas bien sûr de vibration possible. Le domaine d'acceptabilité reste donc fort restreint.

La fin du XVIII^e siècle

Dans d'autres problèmes de physique, mais ayant eu moins d'impact dans la communauté mathématique, Euler montre que la généralité de la définition de fonction de 1655 va au-delà d'une simple intention. Ainsi, en 1765, dans une étude sur la génération et la propagation du son dans l'air[6], Euler introduit des fonctions dont la valeur est partout nulle sauf en un point, (nous dirions aujourd'hui une fonction de Dirac) obtenant ainsi, et l'utilisant comme tel, une base non-dénombrable de l'ensemble des fonctions réelles. Cette grande liberté d'esprit a été suscitée par la nature du problème physique traité. Contrairement à la corde qui doit être d'un seul tenant, l'air, dont la nature et le comportement sont pour nous beaucoup moins intuitifs, laisse place à l'introduction de discontinuités. Ce manque d'intuition redonne au symbolisme une liberté auparavant brimée par des a priori physique.

Malgré les exceptions comme celles ci-haut, Euler reste attaché à la nécessité pour les bonnes fonctions d'être représentées par une seule expression symbolique sur tout le domaine réel. Ainsi, en 1768, dans son *Institutiones calculi intregralis*[8] notant qu'en général une augmentation infiniment petite d'une variable entraîne une petite variation de la fonction, il ajoute un peu plus loin qu'il y a des fonctions qui, en certains points, varient beaucoup alors que la variable varie peu et donne l'exemple de la fonction

$$X = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ au point } x = 1.$$

Jusqu'au début du XIX^e siècle, les définitions de fonction reprennent en gros celle d'Euler données en 1755. Par exemple celle de Condorcet, de 1778[9]:

> Je suppose que j'ai un certain nombre de quantités x, y, z, ..., F et que pour chaque valeur déterminée de x, y, z, ... etc., F ait une ou plusieurs valeurs déterminées qui y répondent: je dis que F est une fonction de x, y, z, ...

Et encore celle de Lacroix, de 1797[10]:

> Toute quantité dont la valeur dépend d'une ou de plusieurs autres quantités, est dite *fonction* de ces dernières, soit qu'on sache ou qu'on ignore par quelles opérations il faut passer pour remonter de celles-ci à la première.

Toutefois, dans le quotidien des mathématiciens, la définition d'Euler de 1748 suffit. La meilleure preuve en est la définition de fonction donnée par Lagrange en 1797[11]:

> On appelle fonction d'une ou de plusieurs quantités, toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque mêlées ou non d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables tandis que ls quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles.

La fonction mathématique est redevenue une «expression de calcul». De fait, Lagrange se prépare à construire une théorie basée sur l'hypothèse que toute fonction est représentable par une série entière.

Il faudra un nouveau problème pour faire évoluer de façon significative la personnalité de la fonction. Ce sera l'étude entreprise en 1805 par Fourier de la propagation de la chaleur dans les corps solides qui débloquera à nouveau la situation et rendra à la seconde définition d'Euler son droit de cité en mathématiques. C'est ce que nous verrons dans la prochain et dernier épisode de la recherche d'un auteur par un personnage, la fonction.

NOTES

1 - Par la suite, le mot auteur sera employé au singulier, mais il continuera de signifier l'ensemble des mathématiciens.

2 - Traduction de Dahan-Dalmedico, A., Peiffer, J., (1982) *Une Histoire des mathématiques,* Seuil (Coll. Point, S49), p. 221; texte original dans les œuvres complètes d'Euler, *Opera Omnia,* ser. 1, vol 8, p. 18.

3 - Boyer, C. (1956), *History of Analytic Geometry,* Scripta Mathematica, p. 180.

4 - En fait la représentation prenait aussi la forme de produit infini, de fractions continues.

5 - Youschkevitch, A.P. (1976), The Concepts of Function up to the Middle of the 19th Century, *Archives for the History of Exact Sciences,* vol. 16, p. 62 ou Euler, L. (1748), *Introductio in Analysin Infinitorum,* section 6, du livre I, chap. 1, (dans les *Opera Omnia* ser. 1, vol. 8, p. 19). Ma traduction.

6 - Youschkevitch (1976), p. 70.

7 - Youschkevitch (1976), p. 71, note 22a.

8 - Youschkevitch (1976), p. 72.

9 - *Traité du calcul intégral,* texte manuscrit, cité dans Youschkevitch (1976), p. 75.

10 - *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral,* tome I, p. 1.

11 - *Théorie des fonctions analytiques, Œuvres de Lagrange,* t. 9, p. 15, cité dans Youschkevitch (1976), p. 63, note 17.

Quelques nouvelles

1. L'APAME annonce que l'Olympiade mathématique pour les élèves du primaire a connu un très vif succès. Plus de 90 000 élèves y ont participé. La prochaine olympiade mathématique, appelée MATHÉMATHLON, aura lieu seulement en 1989. En 1987-1988, les élèves des 3e, 4e, 5e et 6e années s'entraîneront... Félicitations et bravo pour cette belle activité!

2. Madame Noëlange Boisclair s'est joint, depuis juillet dernier, au Comité de rédaction du Bulletin AMQ. Nous sommes heureux de sa collaboration. Nous savons que Madame Boisclair a toujours été active au sein de l'AMQ depuis sa fondation.

3. Monsieur Jean-Marie Labrie, secrétaire de l'information de l'AMQ et éditeur du Bulletin AMQ depuis cinq ans, est maintenant professeur à la Faculté d'éducation de l'Université de Sherbrooke. En juin dernier, comme consultant, il fut envoyé par l'Université de Sherbrooke en mission au Burkina Faso. Félicitations et bon succès dans ces nouvelles fonctions!

4. 1988 marquera le 30e anniversaire de fondation de l'Association mathématique du Québec (AMQ). Que ferons-nous? que devrions-nous faire? Envoyez-nous vos suggestions.