ANALYSE COMBINATOIRE: À PROPOS DE MOTS

Pierre Gingras

Combien de mots de cinq lettres peut-on écrire en se servant des seules lettres du mot **MISSISSIPI?**

C'est un problème classique et souvent on l'aborde en faisant l'étude par cas. L'étude des fonctions génératrices va nous permettre de l'aborder de façon plus efficace.(1)

NOMBRE DE MOTS DE CINQ LETTRES AVEC LES LETTRES DU MOT MISSISSIPI.

Méthode pénible: étude par cas.

On considère en général les catégories de mots selon le nombre de lettres semblables; par exemple, cinq lettres semblables, ou deux lettres semblables et trois autres lettres, etc. Pour chacune de ces catégories, on doit ensuite discuter des quantités de mots qu'il est possible de former compte tenu des restrictions imposées par l'énoncé du problème. Dans le cas qui nous occupe, nous obtenons:

a) Mots de cinq lettres semblables.
Aucun mot, puisque, le mot **MISSISSIPI** ne contient pas cinq fois une même lettre.

b) Quatre lettres identiques et une autre lettre.
L'étude de la deuxième catégorie nous amène à considérer deux cas:

i) les mots contenant les quatre S accompagnés d'une des lettres: I, M ou P;

ii) les mots contenant les quatre I accompagnés d'une des lettres: M, P ou S;

dans chacun de ces cas, on compte 15 mots possibles pour un total de 30 mots.

c) Deux lettres différentes, une revient trois fois et l'autre deux fois.
La troisième catégorie donne également lieu à deux cas particuliers:

i) les mots contenant trois I et deux S;

ii) les mots contenant deux I et trois S;

ces deux cas fournissent en tout 20 mots.

d) Trois lettres différentes dont une revient trois fois.
Dans la quatrième catégorie, on distingue encore deux cas principaux:

i) les mots qui contiennent trois S et deux lettres parmi I, M et P;

ii) les mots qui contiennent trois I et deux lettres parmi M, P et S;

on ajoute donc 120 nouveaux mots à notre liste.

e) Trois lettres différentes, deux de ces lettres reviennent chacune deux fois.
La cinquième catégorie ne couvre qu'un seul cas:

les mots formés à partir de SSII avec une des lettres M ou P; ce qui donne lieu à 60 mots différents.

f) Quatre lettres différentes dont une revient deux fois.
La sixième catégorie présente deux cas:

i) les mots formés des lettres SSIMP;

ii) les mots formés des lettres IIMPS;

les permutations de ces lettres donnent en tout 120 mots.

g) Cinq lettres différentes.
La dernière catégorie est vide: le mot MISSISSIPI ne contient que quatre lettres différentes.

Si on additionne tous ces résultats, on obtient 350 mots différents.

Cette solution permet d'imaginer l'enchevêtrement des cas au fur et à mesure que l'envergure du problème progresse avec le nombre de lettres mises en cause. Que l'on pense au nombre de catégories qu'il faudrait considérer pour répondre à la question du nombre de mots de vingt lettres que l'on peut former à partir de la suite:

«AAAAAAAAAAAAAAAABBBBBBBBCCCCCCCCCC CCCCCDDDEEFGGGGGGGGGGG»

Un problème de cette taille pourra paraître impraticable tant il faut y mettre d'attention pour ne rien oublier. L'étude par cas a cet inconvénient que, lorsque leur nombre croît, il devient à peu près impossible d'en garantir l'intégralité.

Méthode par multiplication de polynômes

Voyons donc s'il ne serait pas possible de procéder autrement. Pour y arriver, je passerai par l'étude des

---

Note: Le présent article est un abrégé d'un texte paru dans les «Cahiers de Cap-Rouge» vol. 14, nº 4, pages 30-44. Cependant l'article original ne contient pas les *problèmes d'application* qui apparaissent ci-après.

(1) On pourra se référer aux textes suivants pour plus de précisions: BOGART, K. P., **Introductory Combinatories,** Pitman Publ. Inc.; WALLIS, W. D., STREET, A.P., **Combinatorial Theory; An Introduction,** The Charles Babbage Research Centre.

polynômes dont j'ai déjà présenté les éléments essentiels dans l'article «**Analyse combinatoire et algèbre élémentaire**». Examinons le produit des polynômes suivants:

$$\left(1 + I + \frac{I^2}{2!} + \frac{I^3}{3!} + \frac{I^4}{4!}\right)$$

$$\left(1 + S + \frac{S^2}{2!} + \frac{S^3}{3!} + \frac{S^4}{4!}\right)$$

$$(1 + M)$$

$$(1 + P)$$

Le tableau I nous fournit tous les termes du produit regroupés en colonne. Chaque colonne contient des monômes de même degré et donc, si on interprète les exposants comme un indice de répétition de la lettre qu'il affecte, on retrouve dans chaque colonne des expressions qui contiennent le même nombre de lettres: dans la colonne «0», l'expression «1» ne contient aucune lettre; dans la colonne «1», on retrouve chacune des lettres I, M, P et S; dans la colonne «2», on dénombre tous les choix de deux lettres; etc. Les expressions sont accompagnées, au dénominateur, de factoriels correspondant à l'exposant qui affecte une ou plusieurs lettres; si donc on multiplie et divise simultanément chacune de ces expressions par le factoriel du nombre identifiant la colonne, on obtiendra une expression numérique pour chaque terme nous donnant le nombre de façons de permuter les lettres du monômes en cause; voici quelques exemples tirés du tableau I:

Dans la quatrième colonne, de l'expression:

$$\frac{4!}{2!}\,\frac{I^2MS}{4!}$$

on peut extraire le coefficient numérique $\frac{4!}{2!}$ qui correspond au nombre de façons de permuter les lettres IIMS;

$$\frac{8!}{4!2!}\,\frac{I^4MPS^2}{8!}$$

a comme coefficient numérique $\frac{8!}{4!2!}$ qui correspond au nombre de façons de permuter les lettres IIIIMPSS.

Si on remplace toutes les lettres par une seule et même lettre, X par exemple, et si on additionne tous les monômes ainsi obtenus, on débouche sur un polynôme en X. L'examen de chacun des termes de ce polynôme et les remarques que nous venons d'ajouter nous permettent de saisir le sens que prennent chacun des coefficients de ce polynôme: le coefficient de «X^r» nous indique le nombre de façons d'écrire des mots de «r» lettres chacun. Combien y a-t-il de mots de six lettres formés à partir des lettres du mot MISSISSIPI? Le tableau I nous dit: 890. Combien y en a-t-il de 8 lettres? Les calculs effectués nous permettent de répondre: 3990. Ce polynôme répond donc aux questions que l'on peut se poser sur la formation des mots à partir des lettres du mot MISSISSIPI.

On aura compris que, pour résoudre le problème de manière générale, **il suffit de multiplier un certain nombre de polynômes en X.** En effet, le remplacement de toutes les lettres par une seule et même lettre donne, au point de départ, les polynômes suivants:

$$\left(1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \frac{X^4}{4!}\right)$$

$$\left(1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \frac{X^4}{4!}\right)$$

$$(1 + X)$$

$$(1 + X)$$

et le produit devient:

$$\left(1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \frac{X^4}{4!}\right)\left(1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \frac{X^4}{4!}\right)(1 + X)(1 + X)$$

Les explications que j'ai présentées à l'aide du tableau I nous amènent à la solution du problème posé par le biais des coefficients que l'on doit cependant modifier en les multipliant par le factoriel approprié. On peut aisément se convaincre qu'il en sera ainsi dans toutes les situations analogues où il est question de former des mots.

En guise de conclusion, qu'on me permette une dernière remarque. Dans un problème donné, il n'est souvent question que d'une classe de mots: par exemple des mots de cinq lettres comme c'était le cas dans la question que nous avons posée dans l'introduction. Ce pourra être le nombre de mots de six lettres qui sera demandé ou toute autre quantité. Si tel est le cas, il est inutile de calculer le produit complet de tous les polynômes; il suffira alors de ne calculer que les premiers termes du produit: si l'on cherche le nombre de mots de cinq lettres, on ne calculera que les termes de degré inférieur ou égal à cinq, ce qui fournira un coefficient pour $x^5/5!$. Si on cherche de trouver le nombre de mots de sept lettres que l'on peut former avec les lettres du mot ANTICONSTITUTIONNELLEMENT, on pourra procéder par la multiplication des polynômes suivants:

$(1 + X)$ pour la lettre A;

$\left(1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \frac{X^4}{4!} + \frac{X^5}{5!}\right)$ pour les lettres N;

$\left(1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \frac{X^4}{4!} + \frac{X^5}{5!}\right)$ pour les lettres T;

$\left(1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!}\right.$ pour les lettres I;

$(1 + X)$ pour la lettre C;

$\left(1 + X + \frac{X^2}{2!}\right)$ pour les lettres O;

$(1 + X)$ pour la lettre S;

$(1 + X)$ pour la lettre U;

$\left(1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!}\right)$ pour les lettres E;

$\left(1 + X + \frac{X^2}{2!}\right)$ pour les lettres L;

$(1 + X)$ pour la lettre M;

ce qui nous amène au produit:

$$\left(1 + X\right)^5\left(1 + X + \frac{X^2}{2!}\right)^2\left(1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!}\right)^2 \left(1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \frac{X^4}{4!} + \frac{X^5}{5!}\right)^2$$

À chacune des étapes du calcul, on pourra tronquer le produit à partir du terme en X^8.

Les facteurs de ce produit sont des polynômes qui peuvent se calculer sans trop de mal si l'on sait s'y prendre de façon ordonnée et systématique; je ne prétends pas que le produit soit aisé à mener; je dis qu'il faut y aller avec méthode. Pour ce faire, il faut tenir compte de la nature des polynômes, en particulier de la forme factorielle qui intervient dans les termes de chacun. Voici le résultat que l'on obtient pour le problème posé ici:

$$\left(1 + X\right)^5\left(1 + X + \frac{X^2}{2!}\right)^2\left(1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!}\right)^2 \left(1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \frac{X^4}{4!} + \frac{X^5}{5!}\right)^2 =$$

$$1 + 11 + X + 116\cdot\frac{X^2}{2!} + 1174\cdot\frac{X^3}{3!} + 11412\cdot\frac{X^4}{4!} + 106592\cdot\frac{X^5}{5!} + 956730\cdot\frac{X^6}{6!} + 8249850\cdot\frac{X^7}{7!} + \ldots$$

Le coefficient de $X^7/7!$ nous restitue 8 249 850, ce qui correspond au nombre de mots de sept lettres que l'on peut former avec les lettres du mot ANTICONSTITUTIONNELLEMENT.

Quelques problèmes d'application

On peut s'intéresser à l'étude de plusieurs problèmes connexes; par exemple: mots contenant un groupe de lettres déterminées ou mots contenant telle lettre en quantité déterminée. À titre d'exemple, considérons les problèmes suivants:

1) *Combien de mots de six lettres peut-on former à partir des lettres du mot coccoricco qui contiennent au moins un* **c**?

On peut répondre à cette question en calculant le nombre de mots de six lettres que l'on peut former à partir du mot **coccoricco** et en enlevant de ce nombre le nombre de mots de six lettres que l'on peut former à partir des seules lettres: **o, o, o, i, r.** On peut se rendre compte que, dans ce dernier cas, il n'est pas possible de former un seul mot de six lettres, ce qui signifie qu'en fait tous les mots de six lettres que l'on peut former à partir du mot **coccoricco** contiennent déjà au moins un **c**; donc il s'en trouve 803.

2) *Combien de mots de quatre lettres peut-on former à partir des lettres du mot* **coccoricco** *qui contiennent au moins un* **c**?

Dans ce cas, on pourra résoudre le problème par soustraction: nombre de mots de six lettres que l'on peut former à partir des lettres du mot «coccoricco» dont on soustraira le nombre de mots que l'on peut former à partir des seules lettres «o,o,o,r,i».

Au point de départ nous obtenons: 127 mots possibles; dans le second cas, il est possible de former 20 mots; la différence entre les deux nous donne: 107 mots.

3) *Combien de mots de six lettres contenant un nombre impair de* **o** *peut-on former avec les lettres du mot* **coccoricco**?

Le seul changement qu'il faut apporter à la méthode précédente, c'est de modifier le polynôme qui représente la lettre **o**; en effet si la lettre **o** doit apparaître un nombre impair de fois, il suffit de modifier le polynôme correspondant en supprimant les termes de degré pair, soit le «1» et le terme en «X^2». Le produit des polynômes donne alors:

$$X + 6\frac{X^2}{2!} + 22\frac{X^3}{3!} + 64\frac{X^4}{4!} + 175\frac{X^5}{5!} + 446\frac{X^6}{6!} + \ldots$$

Il existe donc 446 mots contenant un nombre impair de «o».

TABLEAU I: CALCUL DES COEFFICIENTS

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	I	$2!\,\frac{IM}{2!}$	$3!\,\frac{IMP}{3!}$	$4!\,\frac{IMPS}{4!}$	$\frac{5!}{2!}\,\frac{IMPS^2}{5!}$	$\frac{6!}{3!}\,\frac{IMPS^3}{6!}$	$\frac{7!}{4!}\,\frac{IMPS^4}{7!}$	$\frac{8!}{2!4!}\,\frac{I^2MPS^4}{8!}$	$\frac{9!}{3!4!}\,\frac{I^3MPS^4}{9!}$	$\frac{10!}{4!4!}\,\frac{I^4MPS^4}{10!}$
	M	$2!\,\frac{IP}{2!}$	$3!\,\frac{IMS}{3!}$	$\frac{4!}{2!}\,\frac{IM^2}{4!}$	$\frac{5!}{3!}\,\frac{IMS^3}{5!}$	$\frac{6!}{4!}\,\frac{IMS^4}{6!}$	$\frac{7!}{2!3!}\,\frac{I^2MPS^3}{7!}$	$\frac{8!}{3!3!}\,\frac{I^3MPS^3}{8!}$	$\frac{9!}{4!3!}\,\frac{I^4MPS^3}{9!}$	
	P	$2!\,\frac{IS}{2!}$	$3!\,\frac{IPS}{3!}$	$\frac{4!}{2!}\,\frac{IPS^2}{4!}$	$\frac{5!}{3!}\,\frac{IPS^3}{5!}$	$\frac{6!}{4!}\,\frac{IPS^4}{6!}$	$\frac{7!}{2!4!}\,\frac{I^2MS^4}{7!}$	$\frac{8!}{3!4!}\,\frac{I^3MS^4}{8!}$	$\frac{9!}{4!4!}\,\frac{I^4MS^4}{9!}$	
	S	$\frac{2!}{2!}\,\frac{I^2}{2!}$	$\frac{3!}{2!}\,\frac{IS^2}{3!}$	$\frac{4!}{3!}\,\frac{IS^3}{4!}$	$\frac{5!}{4!}\,\frac{IS^4}{5!}$	$\frac{6!}{2!2!}\,\frac{I^2MPS^2}{6!}$	$\frac{7!}{2!4!}\,\frac{I^2PS^4}{7!}$	$\frac{8!}{3!4!}\,\frac{I^3PS^4}{8!}$	$\frac{9!}{4!4!}\,\frac{I^4PS^4}{9!}$	
		$2!\,\frac{MP}{2!}$	$\frac{3!}{2!}\,\frac{I^2M}{3!}$	$\frac{4!}{2!}\,\frac{I^2MP}{4!}$	$\frac{5!}{2!}\,\frac{I^2MPS}{5!}$	$\frac{6!}{2!3!}\,\frac{I^2MS^3}{6!}$	$\frac{7!}{3!2!}\,\frac{I^3MPS^2}{7!}$	$\frac{8!}{4!2!}\,\frac{I^4MPS^2}{8!}$		
		$2!\,\frac{MS}{2!}$	$\frac{3!}{2!}\,\frac{I^2P}{3!}$	$\frac{4!}{2!}\,\frac{I^2MS}{4!}$	$\frac{5!}{2!2!}\,\frac{I^2MS^2}{5!}$	$\frac{6!}{2!3!}\,\frac{I^2PS^3}{6!}$	$\frac{7!}{3!3!}\,\frac{I^3MS^3}{7!}$	$\frac{8!}{4!3!}\,\frac{I^4MS^3}{8!}$		
		$2!\,\frac{PS}{2!}$	$\frac{3!}{2!}\,\frac{I^2S}{3!}$	$\frac{4!}{2!}\,\frac{I^2PS}{4!}$	$\frac{5!}{2!2!}\,\frac{I^2PS^2}{5!}$	$\frac{6!}{2!4!}\,\frac{I^2S^4}{6!}$	$\frac{7!}{3!3!}\,\frac{I^3PS^3}{7!}$	$\frac{8!}{4!3!}\,\frac{I^4PS^3}{8!}$		
		$\frac{2!}{2!}\,\frac{S^2}{2!}$	$\frac{3!}{3!}\,\frac{I^3}{3!}$	$\frac{4!}{2!2!}\,\frac{I^2S^2}{4!}$	$\frac{5!}{2!3!}\,\frac{I^2S^3}{5!}$	$\frac{6!}{3!}\,\frac{I^3MPS}{6!}$	$\frac{7!}{3!4!}\,\frac{I^3S^4}{7!}$	$\frac{8!}{4!4!}\,\frac{I^4S^4}{8!}$		
			$3!\,\frac{MPS}{3!}$	$\frac{4!}{3!}\,\frac{I^3M}{4!}$	$\frac{5!}{3!}\,\frac{I^3MP}{5!}$	$\frac{6!}{3!2!}\,\frac{I^3MS^2}{6!}$	$\frac{7!}{4!}\,\frac{I^4MPS}{7!}$			
			$\frac{3!}{2!}\,\frac{MS^2}{3!}$	$\frac{4!}{3!}\,\frac{I^3P}{4!}$	$\frac{5!}{3!}\,\frac{I^3MS}{5!}$	$\frac{6!}{3!2!}\,\frac{I^3PS^2}{6!}$	$\frac{7!}{4!2!}\,\frac{I^4MS^2}{7!}$			
			$\frac{3!}{2!}\,\frac{PS^2}{3!}$	$\frac{4!}{3!}\,\frac{I^3S}{4!}$	$\frac{5!}{3!}\,\frac{I^3PS}{5!}$	$\frac{6!}{3!3!}\,\frac{I^3S^3}{6!}$	$\frac{7!}{4!2!}\,\frac{I^4PS^2}{7!}$			
			$\frac{3!}{3!}\,\frac{S^3}{3!}$	$\frac{4!}{4!}\,\frac{I^4}{4!}$	$\frac{5!}{3!2!}\,\frac{I^3S^2}{5!}$	$\frac{6!}{4!}\,\frac{I^4MP}{6!}$	$\frac{7!}{4!3!}\,\frac{I^4S^3}{7!}$			
				$\frac{4!}{2!}\,\frac{MPS^2}{4!}$	$\frac{5!}{4!}\,\frac{I^4M}{5!}$	$\frac{6!}{4!}\,\frac{I^4MS}{6!}$				
				$\frac{4!}{3!}\,\frac{MS^3}{4!}$	$\frac{5!}{4!}\,\frac{I^4P}{5!}$	$\frac{6!}{4!}\,\frac{I^4PS}{6!}$				
				$\frac{4!}{3!}\,\frac{PS^3}{4!}$	$\frac{5!}{4!}\,\frac{I^4S}{5!}$	$\frac{6!}{4!2!}\,\frac{I^4S^2}{6!}$				
				$\frac{4!}{4!}\,\frac{S^4}{4!}$	$\frac{5!}{3!}\,\frac{MPS^3}{5!}$	$\frac{6!}{4!}\,\frac{MPS^4}{6!}$				
					$\frac{5!}{4!}\,\frac{MS^4}{5!}$					
					$\frac{5!}{4!}\,\frac{PS^4}{5!}$					
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$$1 + 4X + 14\frac{X^2}{2!} + 44\frac{X^3}{3!} + 128\frac{X^4}{4!} + 350\frac{X^5}{5!} + 890\frac{X^6}{6!} + 2030\frac{X^7}{7!} + 3990\frac{X^8}{8!} + 6300\frac{X^9}{9!} + 6300\frac{X^{10}}{10!}$$