Chronique: *L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES*

Louis Charbonneau
Dépt. Math. et Inf., UQAM

QU'EST-CE QU'UN ANGLE?

La notion d'angle, simple en apparence se révèle fort rébarbative lorsqu'il s'agit de la cerner, et ce aussi bien pour un élève que pour un mathématicien. Pourtant, nous sommes entourés d'angles. Voilà un de ces concepts qui dans la pratique est manipulable mais qui demeure fluide à une définition qui tienne compte de toutes ses facettes.

On m'a demandé de faire un survol des idées qu'on s'est fait de cette notion. La tâche s'est révélée beaucoup plus ardue que je ne l'avais d'abord pensée. Je vous livre néanmoins quelques résultats de mes lectures.

La voûte étoilée: l'angle se camoufle

La première manifestation de l'angle dans le domaine des sciences exactes semble avoir été en astronomie. En effet, dès la plus haute antiquité, il a fallu prendre des mesures de la position dans le firmament des étoiles et des planètes à différents moments de la nuit. Aujourd'hui, une telle mesure est assimilée à une mesure d'angle. Il n'en était toutefois pas ainsi avant les Grecs. Dans l'Antiquité pré-grecque, cette position correspondait plutôt à une mesure de temps. Comme je l'ai dit dans la chronique de septembre dernier, le degré est alors égal à $\frac{1}{360}$ du temps que prend une étoile pour revenir à une position donnée dans le firmament. Autrement dit, le degré est égal à $\frac{1}{360}$ d'une journée (24 heures). Cette mesure deviendra géométrique par le fait que les Grecs développèrent un modèle purement géométrique de l'univers apparent. En considérant la voûte étoilée comme une grande sphère au centre de laquelle gît la Terre, cette unité de mesure temporelle prend une teinte purement géométrique par le fait qu'il y a une relation entre le temps écoulé et la position d'une étoile ou d'une planète.

Il me semble important de garder en mémoire que ces angles sont tous d'un même type, c'est-à-dire qu'ils sont tous des angles dont les côtés sont délimités par le sommet de l'angle et un cercle.

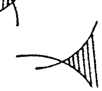
L'angle et la géométrie déductive: une question de définition

Boyer, dans son histoire classique récente des mathématiques, souligne (p. 176) qu'avant les Grecs, le concept de mesure d'angle n'existait pas. Cette affirmation se comprend dans le sens que le lien entre les mesures astronomiques et les mesures d'ouverture d'un segment de disque est l'œuvre des astronomes-mathématiciens grecs. Mais dès les tout débuts de l'activité mathématique grecque, l'angle joue un rôle central. Ainsi, Thales de Milet (624-548 av. J.-C.), considéré par la tradition comme le premier mathématicien grec, aurait affirmé (en le démontrant ou non, il est impossible de le dire), que les angles à la base du triangle isocèle (c'est-à-dire ayant deux côtés égaux) sont égaux et beaucoup d'autres théorèmes mettant en relation les longueurs des côtés des triangles et les angles qui les sous-tendent.

Mais encore là, est-il besoin depréciser ce qu'est un angle pour arriver à ces résultats? Ce fut probablement la grande entreprise de transformation de la géométrie d'une science inductive à une science déductive qui a obligé les géomètres à préciser ce qu'ils entendaient par «angle».

La perception qui semble s'être manifestée d'abord est celle de l'angle-figure. Même s'il n'y a pas de documents faisant directement allusion à cette vision d'un angle, on peut le déduire de la classification des angles plans telle que la donne Proclus, le commentateur d'Euclide. Selon lui, et en cela il reflète une tradition qui remonte bien avant Euclide. Cette classification repose sur la nature des courbes délimitant un angle. (Heath, p. 178)

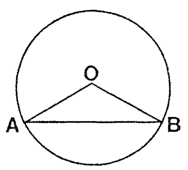
ANGLE PLAN:

1) Par des courbes simples (droites ou cercles):
   a) par deux droites (angle rectiligne) 
   b) par une droite et un cercle
      - entre une droite et une partie convexe d'un cercle
         • par exemple un angle du demi-cercle 
      - entre une droite et une partie concave d'un cercle
         • par exemple un angle corniculaire 
   c) par un cercle et un cercle
      - entre deux parties convexes 
      - entre deux parties concaves 
      - entre une partie concave et une partie convexe 
2) Par une ou des courbes mixtes (Par exemple dans une cissoïde ou une cardioïde ou par une hyperbole et une parabole)
3) Par une courbe simple et une courbe mixte. (Par exemple un cercle et une ellipse, ou une ellipse et un de ses axes)

Comme vous le voyez, il s'agit ici beaucoup plus que les angles rectilignes auxquels le mot angle (plan) fait maintenant univoquement référence lorsqu'on se limite au plan. L'angle est plutôt une partition du plan. D'ailleurs, Aristote (Heath, p. 178) qualifie les angles (droits ou courbes) de «genre de figure». Dans cette perspective, il est normal que les angles rectilignes ne soient qu'un type d'angle parmi d'autres. Ajoutons que le qualificatif «simple» pour droite ou cercle, par opposition à «mixte» pour tout autre courbe, correspond à l'importance donnée à l'époque à la géométrie de la règle et du compas, importance découlant de l'impression qu'avaient les Grecs que les mouvements naturels dans l'univers étaient les mouvements en ligne droite (chute d'un corps) et les mouvements circulaires (orbites des planètes).

Les angles inscrits dans un cercle jouèrent un rôle central dans la pratique manipulatoire des angles. En effet, comme en astronomie, l'angle dont le sommet se trouve au centre d'un cercle est mesuré par la portion de cercle qu'il sous-tend. De même, deux angles dont le sommet se trouve sur le cercle et qui sous-tendent le même arc de cercle sont égaux entre eux et égaux à un angle au centre sous-tendant un arc du même cercle de longueur ayant la moitié du premier. C'est pourquoi peut-être les angles délimités par une droite et un cercle semblent avoir eu un statut plus primaire que les angles rectilignes. Par exemple, Aristote donne une «preuve» du théorème suivant: Dans un triangle isocèle (c'est-à-dire ayant deux côtés égaux), les angles à la base sont égaux), (Heath. t. 1, pp. 252-253):

> Soit le triangle isocèle AOB. Considérant le sommet O comme centre, traçons un cercle passant par A et B. Il nous faut montrer que l'angle A égale l'angle B.



> Or l'angle du demi-cercle OAB (limité par le rayon AO et l'arc de cercle AB) égale l'arc du demi-cercle OBA. Par ailleurs, l'angle BAB (limité par le segment AB et l'arc AB) égale l'angle ABA (limité par le segment BA et l'arc BA) sont égaux. Donc, en enlevant de l'angle du demi-cercle OAB l'angle BAB, on obtient l'angle OAB qui sera donc égal à l'angle OBA obtenu en enlevant de l'angle du demi-cercle OBA (égal à OBA) l'angle ABA (égal à BAB).

La justification de l'égalité des divers «angles» formés par un segment de droite et un arc de cercle ne nous est pas connue, mais la bijection entre la mesure de ces angles et la longueur de l'arc de cercle qu'ils sous-tendent y joue certainement un rôle central.

Comme la plupart du temps en géométrie, Euclide est le point de référence qu'il est impossible d'éviter. Sa définition d'angle laisse toutefois un peu songeur.

> *Livre I, Déf. 8:* Un angle est l'inclinaison l'une sur l'autre de deux lignes qui se rencontrent dans un plan et qui ne sont pas sur une ligne droite.
>
> *Livre I, Déf. 9:* Lorsque les lignes contenant l'angle sont des lignes droites, l'angle est dit rectiligne.

Cette idée d'inclinaison semble une nouvelle approche. Auparavant, si on se fit à Aristote, lorsqu'il s'agissait de définir un angle, on parlait plutôt de déflection ou de brisure d'une ligne. De fait, Euclide voulait probablement définir uniquement l'angle rectiligne, mais poussé par la tradition, il aurait finalement accepté de définir globalement un angle, pour préciser par la suite le sens d'angle rectiligne. D'ailleurs, dans ses *Éléments*, il n'employera, sauf à un endroit, que ces derniers angles.

On notera que, selon la définition ci-haut, un angle de 180° n'est pas un angle et que, de fait, seuls les angles strictement inférieurs à deux droits sont considérés comme des angles.

De nos jours, nous retrouvons encore diverses définitions d'angle rectiligne. La plus répandue dans les livres de géométrie de niveau universitaire est sans contredit celle donnée par Hilbert en 1899 dans son livre célèbre: *Les fondements de la géométrie:*

> *Soient h et k deux demi-droites différentes d'un plan* α, issues d'un point O et appartenant à des droites différentes. L'ensemble des demi-droites h et k est appelé un angle; nous le désignons par $\measuredangle$ (h, k) ou par $\measuredangle$ (k, h).

Une autre définition d'angle populaire depuis la fin du siècle dernier est celle de l'angle vue comme mesure de la rotation nécessaire pour amener un de ses côtés et ce, sans sortir du plan. Cette définition découle de la nécessité de donner un sens à l'orientation d'un angle (positif et négatif) en géométrie et surtout en trigonométrie.

Mais qu'est-ce qu'un angle?

Dans les *Éléments de géométrie théorique et pratique* des Frères de l'Instruction Chrétienne (La Prairie, 1946) on retrouve une définition d'angle qui ressemble un peu à celle d'Euclide:

> Un *angle* est l'écartement plus ou moins grand de deux lignes droites qui se rencontrent. (p. 12)

Un peu plus loin, les auteurs ajoutent:

> Un angle est une *grandeur* qui n'est réductible à aucune autre, ni à une longueur ni à une surface. De même que la longueur d'un segment de droite définit la distance de deux points, de même un angle définit l'écartement de deux directions, leur *distance angulaire.*

Cette remarque relève l'ambiguïté de la nature de l'angle. Ainsi, si on considère un angle comme une portion de plan, l'angle devrait être un objet de dimension 2. Or, la pratique nous le montre plutôt comme un objet de dimension 1.

(Suite à la page 46)

(Suite de la page 6)

L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

QU'EST-CE QU'UN ANGLE

Les Grecs discutèrent abondamment de la nature des angles. Je n'élaborerai pas ici cette question. (Ceux que ces discussions intéressent, veuillez vous référer à Heath, pp. 176 et suivantes). Je me limiterai à donner un exemple: certains philosophes croyaient que l'angle était d'abord une qualité car comme «droite» et «courbe» sont une qualité d'une ligne, de même un angle est la qualité d'une surface d'être plus ou moins contractée sous la ligne brisée formée par les côtés d'un angle.

Le fond de ces discussions nous échappe aujourd'hui. Mais il ne faudrait pas croire pour autant que nous ayons réglé la question. Il serait plus juste de dire que nous ne nous posons tout simplement plus la question. Une étude de la conception qu'ont les enfants de la nature de l'angle nous ramenerait sans doute, comme c'est souvent le cas avec l'histoire, à ces conceptions antiques.

BIBLIOGRAPHIE

Euclide, *The Thirteen Books of The Elements*, traduction et commentaires par Thomas L. HEATH, (éd. Dover, 1956). Voir en particulier les notes sur les définitions 8 et 9 (pp. 176 à 181) ainsi que de la proposition 5 du livre I (pp. 252 à 255).

HILBERT, David, *Les fondements de la Géométrie*, 1re édition 1899, éd. par Paul Roussin, Paris (Dunod), 1971.