LA COMBINATOIRE À L'ÉCOLE LAMBERT-CLOSSE

Jacques Labelle
(UQAM et CRM)

Introduction

Beaucoup de problèmes organisationnels (de combinatoire) se posent dans nos écoles du Québec. Dans la classe de France à l'école Lambert-Closse, il y a n élèves:

Problème 1

De combien de façons peut-on mettre ces élèves en un rang simple de longueur n?

Bien sûr, il y a n choix pour le premier du rang, $n - 1$ choix pour le second, ...; donc $n(n - 1) \dots (2)(1) = n!$ rangs possibles.

Problème 2

Soit $0 \leqslant k \leqslant n$. De combien de façons peut-on faire un rang de k élèves choisis dans cette classe?

La réponse est cette fois:

$$n(n - 1) \dots (n - (k - 1)) = \frac{n!}{(n - k)!}.$$

Problème 3

De combien de façons peut-on former une équipe de k élèves de cette classe? Chaque rang de k élèves détermine une telle équipe mais chaque équipe provient de k! rangs distincts. On a donc $n! / k! (n - k)!$, ce que nous noterons $\binom{n}{k}$, équipes possibles de k élèves.

§ 1. Formation d'équipes scolaires

Problème 4

Démontrer la formule:

$$(1)\ \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Supposons que, dans la classe de France, il y ait n élèves dont une fille et $n - 1$ garçons; parmi les équipes de k élèves de cette classe, celles qui contiennent la fille sont en nombre $\binom{n-1}{k-1}$ (car on doit choisir $(k - 1)$ garçons parmi les $(n - 1)$ garçons et celles qui ne contiennent pas la fille en nombre $\binom{n-1}{k}$; d'où la formule (1).

Problème 5

Démontrer la formule:

$$(2)\ \binom{r+s}{k} = \sum_{i \geqslant 0} \binom{r}{i}\binom{s}{k-i} \text{ où } 0 \leqslant k \leqslant r + s.$$

On suppose cette fois qu'il y a r filles et s garçons, où $r + s = n$, et on classe les équipes de k élèves suivant le nombre i de filles qu'elles contiennent. (En fait, i ne peut être qu'entre $\max(0, k - s)$ et $\min(r, k)$).

En particulier pour $k = r = s = m$, on aura:

$$(3)\ \binom{2m}{m} = \sum_{i=0}^{n} \binom{m}{i}\binom{m}{m-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{m}{i}^2.$$

Problème 6

Démontrer la formule:

$$(4)\ m\binom{2m-1}{m-1} = \sum_{i=1}^{m} i\binom{m}{i}^2.$$

Cette fois la classe de $n = 2m$ élèves comprend m garçons et m filles. De combien de façons peut-on en extraire une équipe de m élèves et choisir un capitaine garçon dans l'équipe?

On peut d'abord choisir le capitaine (m choix) puis les $m - 1$ autres membres de l'équipe parmi les $2m - 1$ élèves restants $\left(\binom{2m-1}{m-1} \text{ choix}\right)$. Le nombre de choix possibles est le membre de gauche de (4).

On peut plutôt choisir, pour $1 \leqslant i \leqslant m$, les i garçons de l'équipe $\left(\binom{m}{i} \text{ choix}\right)$, puis le capitaine parmi eux (i choix), puis les $(m - i)$ filles complétant l'équipe $\left(\binom{m}{m-i} = \binom{m}{i}\right.$ choix). Le nombre de choix possibles d'équipes de m élèves avec un capitaine garçon est aussi le membre de droite de (4).

§ 2. La récréation

L'école dispose de m tables de ping-pong $T_1, T_2, \dots, T_m$.

Problème 7

De combien de façons 2m élèves peuvent-ils s'affronter? Ordonnons les élèves par ordre alphabétique.

Le 1er élève choisit son adversaire ($(2m - 1)$ choix) puis leur table (m choix), l'élève libre suivant choisit son adversaire ($(2m - 3)$ choix) puis leur table ($(m - 1)$ choix), ... On trouve donc $m!\,(1)(3) \dots (2m - 1)$ possibilités.

Procédons autrement: il y a $\binom{2m}{2}$ choix pour les deux adversaires jouant sur T_1, $\binom{2m-2}{2}$ choix pour T_2, ...

On trouve cette fois $\binom{2m}{2}\binom{2m-2}{2} \dots \binom{2}{2}$.

Finalement, imaginons les m tables en rangées avec un 1er côté (disons gauche) et un second côté (droit).

Si on place en rang les 2m joueurs ($(2m)!$ choix) et qu'on les installe ensuite de la façon naturelle aux tables (i.e. 1er joueur sur 1er côté de T_1, 2e joueur sur 2e côté de T_1, 3e joueur sur 1er côté de T_2, ..., alors on obtient chaque «appariement» 2^m fois.

D'où la formule (5):

$$(5)\ m!\,(1)(3) \dots (2m+1) = \binom{2m}{2}\binom{2m-2}{2} \dots \binom{2}{2} = \frac{(2m)!}{2^m}.$$

Problème 8

Quel est le nombre possible de résultats pour la première ronde d'un tournoi de ping-pong entre 2m joueurs?

Le premier joueur a (2m − 1) adversaires possibles et peut gagner ou perdre ((2) (2m − 1) possibilités), pour le second ((2) (2m − 3) possibilités),...

D'où, 2^m (1) (3) ... (2m − 1).

Choisissons plutôt les m gagnants $\left(\binom{2m}{m} \text{ choix}\right)$ puis «matchons» les m gagnants aux m perdants (m! choix).

On a donc: (6) $2^m(1)(3)\ldots(2m-1) = \binom{2m}{m}\, m!$

§ 3. La visite médicale

Ludovic doit recevoir deux vaccins (disons A et B) au cours des n + 1 prochains jours. Chacun des vaccins dure une journée et A doit venir avant B.

Problème 9

Combien y a-t-il de vaccinations possibles pour Ludovic? Bien sûr $\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)\,n}{2}$; car on choisit les 2 jours parmi n + 1 puis A est au 1er de ces deux jours et B au second. D'un autre côté, si A a lieu au i^e jour, $1 \leqslant i \leqslant n$, alors il y a (n + 1 − i) choix pour le jour de B.

D'où, $\sum_{i=1}^{n} (n+1-i) = n + (n-1) + \ldots + 1 = \sum_{i=1}^{n} i.$

On a donc (7) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$

Problème 10

Prouver la formule:

(8) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

Cette fois Ludovic doit recevoir trois vaccins (A, B et C) durant les (n + 1) prochains jours.

Le vaccin A dure une journée et doit précéder B et C. Cependant B et C peuvent avoir lieu dans n'importe quel ordre ou même simultanément le même jour.

Si A a lieu au jour i, $1 \leqslant i \leqslant n$, alors pour B et C, on a $(n+1-i)^2$ choix.

D'où $\sum_{i=1}^{n} (n+1-i)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2$ vaccinations possibles.

Classons ces vaccinations en deux cas.

1er cas

B et C ont lieu à des jours différents. Il y a $\binom{n+1}{3}$ choix pour les 3 jours de vaccination. A doit être au premier de ces 3 jours, mais B à n'importe lequel des deux autres jours et C au jour restant.

Donc $2\binom{n+1}{3} = \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{3}$ choix dans ce cas.

2e cas

B et C ont lieu en même temps. Donc $\binom{n+1}{2}$ choix dans ce cas.

On a prouvé

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{3} + \frac{(n+1)\,n}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

en dénombrant de deux façons le nombre de vaccinations.

Nous laissons au lecteur de soin de prouver la formule (9) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ de façon analogue avec cette fois 4 vaccins pour le pauvre Ludovic!

§ 4. Le bal de graduation

L'année scolaire est déjà terminée et, au bal de graduation, il y a m garçons $G_1, G_2, \ldots, G_m$ et m filles $F_1, F_2, \ldots, F_m$.

À tour de rôle, chaque garçon invite une des m filles (sa préférée) et danse avec elle (qui ne peut pas bien sûr refuser) au milieu de la piste (un seul couple à la fois). De combien de façons ceci peut-il se faire? Le 1er garçon a m choix, le second aussi!, ... donc en tout m^m possibilités (dont seulement m!, où toutes les filles auront dansé).

En comptant autrement, nous obtiendrons la formule suivante de Riordan.

(10) $m^m = \sum_{i=1}^{m} \binom{m-1}{i-1}\, i!\, m^{m-i}.$

Soit i tel que G_{i+1} soit le premier garçon à danser avec une fille déjà invitée auparavant.

(Si i = m, alors les m garçons dansent objectivement avec les m filles et m! est bien le terme i = m de la somme.)

Il y a m choix pour la partenaire de G_{i+1}; $\binom{m-1}{i-1}$ choix pour les (i − 1) autres filles qui, avec elle, formeront l'ensemble de i partenaires distinctes de $G_1, G_2, \ldots, G_i$; i! façons de coupler ces i filles avec les i premiers garçons; pour le reste de la danse, les (m − i − 1) garçons ont chacun m choix, soit m^{m-i-1} possibilités.

On trouve donc

$$m^m = \sum_{i=1}^{m} m \binom{m-1}{i-1}\, i!\, m^{m-i-1} = \sum_{i=1}^{m} \binom{m-1}{i-1}\, i!\, m^{m-i}.$$

Remarque

Notez que les formules (1) à (10) admettent beaucoup d'autres démonstrations. La formule (1), par exemple, se démontre directement par calcul à partir de l'expression n! / k! (n − k)! pour $\binom{n}{k}$; les formules (8) et (9) se démontrent habituellement par récurrence; la formule (3) s'obtient en calculant le coefficient de x^m dans le polynôme

$$(1 + x)^{2m} = (1 + x)^m.$$

Nous croyons cependant que les démonstrations décrites dans ce texte sont plus conceptuelles, vivantes et instructives.