Chronique: *L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES*

Louis Charbonneau
Dépt. Math. et Inf., UQAM

LE XIXe SIÈCLE: DU MATHÉMATICIEN DÉCOUVREUR AU MATHÉMATICIEN CRÉATEUR

Un et un font deux. Voilà une vérité qui semble prendre racine dans le concret, dans les objets qui nous entourent. De fait, s'il faut en croire les tenants de la découverte, les mathématiques sont là, quelque part. Il s'agit pour nous et les étudiants d'aller les découvrir, de les sortir de leur cachette.

Et pourtant, on nous dit souvent aussi que les mathématiques sont un jeu. Or les règles d'un jeu ne sont pas écrites dans la nature. Quelqu'un a dû les décréter.

À la fin du XVIIe siècle, les mathématiciens croyaient en général que leur tâche consistait à découvrir les mathématiques. En fait, bon nombre d'entre eux pensaient que l'univers des mathématiques était entièrement connu. Ainsi, Lagrange se faisait l'écho de ses collègues géomètres (c'est ainsi qu'on nommait alors les mathématiciens) lorsqu'il affirmait que les mathématiques avaient atteint un tel point de perfectionnement qu'elles ne sauraient plus faire l'objet de progrès important dans le futur. Cette attitude découlait des progrès remarquables qu'avaient connus les mathématiques au cours de ce siècle, progrès tributaires de l'application du calcul différentiel et intégral à la mécanique d'abord, puis à l'hydrostatique et à d'autres branches de la physique. Au cours de ce siècle, le calcul symbolique s'était tellement perfectionné sous l'impulsion entre autres des Bernoulli, Euler, Lagrange que l'absence d'un support géométrique apparaissait non seulement normal mais même préférable. Ainsi, Lagrange dans son livre célèbre *Mécanique analitique* (sic) publié en 1788, se targue de n'avoir introduit dans son traité aucune figure. Le succès que connaissaient les mathématiques à «expliquer» différents phénomènes confirmait ce que Galilée avait affirmé plus de 150 ans auparavant à savoir que l'univers est écrit en langage mathématique. Mais tout cet édifice symbolique reposait sur des intuitions essentiellement géométriques. Or, on considérait à cette époque que la géométrie procédait d'une intuition première, innée, de l'espace. Aussi, malgré le manque de fondements explicites, le travail symbolique mathématique possédait un caractère de vérité indiscutable.

Il y a néanmoins des objets mathématiques qu'on prend de plus en plus l'habitude de manipuler et dont il est pourtant difficile d'établir leur caractère réel. Les nombres «imaginaires» portent à cet égard bien leur nom. On pourrait tout aussi bien mettre dans cette même catégorie les nombres négatifs dont aucun modèle n'«explique» la règle des signes. Un autre objet mathématique, pourtant fondamental pour la mathématique de la physique, reste aussi hors du domaine du réel: les différentielles dy, dx, etc. Cependant, leur caractère souvent virtuel dans les raisonnements mathématiques, débouchant sur des résultats qui, par la suite, se révèlent justes, diminue le malaise que provoque leur manipulation.

Convergence par nécessité...

L'adéquation de l'univers physique et de l'univers mathématique dans l'esprit des mathématiciens de cette époque est illustrée par l'exemple suivant.

Il est tiré de la célèbre controverse de la corde vibrante. Le problème était de déterminer le mouvement d'une corde tendue entre deux points fixes et que l'on met en vibration. En 1947, Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) montre que la hauteur y à un temps t d'un point placé à la distance x du début de la corde ($y = f(x, t)$) est donnée par l'équation aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

avec la condition initiale qu'au temps 0 la corde décrit une courbe d'équation quelconque $g(x)$, ($g(x) = f(x, 0)$). De plus, le fait que la corde soit fixe en ses bouts ajoute les conditions $f(0, t) = 0$ et $f(\ell, t) = 0$, quel que soit t, la corde étant de longueur ℓ.

Pour résoudre le problème, il s'agissait de trouver la solution la plus générale possible. Plusieurs candidats furent proposés, par D'Alembert lui-même, par Euler, par Daniel Bernoulli et plus tard par Lagrange. La controverse résidait dans l'interprétation de la généralité de la ou des solutions proposées par chacun des protagonistes. Nous nous arrêterons simplement sur l'argument donné par Daniel Bernoulli (1700-1782) en 1753.

La solution de Daniel Bernoulli était:

$$y = \pi \sin \frac{\pi x}{\ell} \cos \frac{\pi c t}{\ell} + \beta \sin \frac{2\pi x}{\ell} \cos \frac{2\pi c t}{\ell} + \ldots$$

où la série se prolonge à l'infini.

Bernoulli arguë que cette série représente la solution la plus générale car il est possible que chaque terme de la série corresponde à une harmonique et que (je paraphrase Bernoulli) la corde puisse composer sa vibration d'une infinité de façons. En effet, tout corps sonore contient potentiellement une infinité de sons et une infinité de façons de produire ces vibrations régulières. Ainsi, lorsque $t = 0$, et puisque la forme de la corde au départ est donnée par $g(x)$, on devrait avoir:

$$g(x) = \alpha \sin \frac{\pi x}{\ell} + \beta \sin \frac{2\pi x}{\ell} + \ldots$$

Donc, une fonction quelconque peut être représentée par une série trigonométrique. L'argument physique permettait à Daniel Bernoulli de contredire l'affirmation antérieure d'Euler qui affirmait en 1748 qu'une telle série ne pouvait représenter qu'une fonction «continue» (aujourd'hui nous dirions *différentiable,* autrement dit dont le graphe ne présente aucune pointe).

On voit par cet exemple que, pour les mathématiciens du XVIIIe, les mathématiques font partie intégrante du monde physique qui les supporte.

La géométrie perd pied

Au début du XIX^e siècle, la partie des mathématiques qui semble avoir les liens les plus intimes avec la réalité physique est la géométrie. Quoi de plus concret, en effet, que l'étude des figures planes et des solides! Comme nous l'avons déjà dit, toutes les mathématiques reposaient sur la prémisse que nous pouvons faire confiance à notre intuition géométrique. La géométrie n'est alors que la mathématisation de données intuitives.

Non seulement la géométrie repose-t-elle clairement sur des fondements intuitifs communément partagés par tous les hommes. Mais, suite aux travaux d'Euclide, au quatrième siècle avant J.-C., la géométrie, au moins celle de la règle et du compas, était organisée de façon déductive, avec ses axiomes, postulats, propositions et théorèmes.

Malgré le caractère exemplaire de cette géométrie déductive, elle restait seule, parmi les diverses branches des mathématiques, à avoir ainsi fait l'objet d'une structuration qui lui assurait une certaine cohérence et qui délimitait, avec un minimum de précision, les bases sur lesquelles elle reposait. Mais cette habile construction logique avait un tendon d'Achille: le cinquième postulat du livre I qu'Euclide énonçait ainsi:

Si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits. (Traduction de Peyrard, 1809)

De ce postulat, il déduisait la proposition suivante (Livre I, prop. 31):

Par un point, une et une seule droite peut être tracée telle qu'elle soit parallèle à une droite donnée.

L'une des conséquences les plus importantes de ce théorème est que la somme des angles internes d'un triangle vaut 180°.

L'inclusion, en tant que postulat d'un énoncé, sur la somme des angles internes d'un triangle avait toutefois été discutée par Aristote 50 ans auparavant. À cette époque, on considérait ces énoncés comme des théorèmes; autrement dit, on pensait pouvoir les démontrer à partir de prémisses évidentes. Mais malgré les efforts déployés, l'on n'y parvenait pas sans tomber dans un raisonnement circulaire. Face à cette difficulté, Aristote, sous l'influence du mathématicien Eudoxe, aurait perçu la nécessité d'introduire un postulat sur les parallèles si l'on voulait s'assurer de la rectitude de la construction de la géométrie. Euclide aurait suivi la recommandation d'Aristote.

Dès les premières tentatives de faire reposer la géométrie sur des bases axiomatiques, donc bien avant Euclide, les Grecs avaient perçu la difficulté de l'acceptation comme une vérité première, autrement dit intuitivement vraie, du «postulat» disant que par un point ne passe qu'une et une seule droite. La publication des Éléments d'Euclide n'a pas résolu cet inconfort. On cherchera par la suite à montrer qu'en fait ce postulat n'est pas nécessaire et ce, en tentant de montrer qu'il peut se déduire des autres postulats et axiomes qu'on considère unanimement comme premiers. Cette approche persiste tout au long de l'histoire des mathématiques. Proclus (410-485) en traite dans son *Commentaire sur le premier livre d'Euclide.* Le célèbre astronome Ptolémée s'intéressa aussi à la question. Quelques mathématiciens arabes, puis d'autres de la Renaissance européenne, enrichirent cette tradition de leurs apports. Au XVIII^e siècle, cette question fut l'objet d'une attention renouvelée particulièrement par des mathématiciens dont les plus souvent cités sont le père Gerolamo Saccheri (1667-1733) et Johan Heinrich Lambert (1728-1777).

Ces mathématiciens étudièrent les conséquences du remplacement du cinquième postulat d'Euclide par une des deux autres possibilités à savoir 1) que, par un point hors d'une droite, passe plus d'une parallèle à cette droite, ou 2) que, par un point hors d'une droite, ne passe aucune parallèle à cette droite. Mais ces recherches visaient à trouver une contradiction dans les systèmes édifiés sur ces postulats. À plusieurs reprises, ils pensèrent avoir mis en évidence une telle contradiction pour se rendre compte par la suite de la circularité de leur raisonnement. Suite à de nombreux efforts infructueux, Saccheri commença à croire à l'indémonstrabilité du cinquième postulat d'Euclide, mais, au fond de lui-même, il demeurait convaincu qu'un système construit à partir des définitions, axiomes et postulats d'Euclide, mais où le cinquième postulat aurait été remplacé par un autre (non équivalent), était contradictoire. Par ailleurs, Lambert modifia cette façon de voir en étudiant de tels systèmes pour en connaître leur structure, et non uniquement pour tenter de mettre en évidence une éventuelle contradiction. Déjà, sur le plan purement logique, Lambert percevait la possibilité qu'un tel système soit non contradictoire, (autrement dit qu'il était impossible de prouver le cinquième postulat à partir des autres axiomes et postulats d'Euclide). Néanmoins, un tel système ne saurait être «géométrique» en ce sens qu'il n'a aucun lien avec la nature.

La géométrie découlait d'une perception intuitive de l'espace, perception intuitive contenant toutes les expériences de l'espace. L'intuition de l'espace est la source de toute notre connaissance de cet espace. La philosophie de Kant, fortement dominante en Allemagne à l'époque, reposait sur l'affirmation de l'antériorité à toute expérience d'intuitions premières telles que celle de l'espace. Dans ce contexte, la géométrie devait reposer sur cette intuition première. Les données de la géométrie ne pouvaient donc qu'être conformes à cette intuition première.

Au tournant du siècle, Carl Friederich Gauss (1777-1855) en vint à croire, dans le secret de son cabinet, que non seulement aucune incohérence ne découle du remplacement du cinquième postulat par un postulat affirmant que par un point hors d'une droite passe une infinité de droites parallèles à la première mais de plus qu'une telle «géométrie» a autant de droit à l'existence que la géométrie d'Euclide. Cette modification fondamentale de la perception de ce corpus géométrique non-intuitif se manifeste par les noms successifs qu'il lui donne. En 1816, il l'appelle «géométrie anti-euclidienne», laissant entendre par là qu'il y a opposition entre les deux systèmes. Par la suite, il employera le terme «géométrie astrale», faisant référence à un ailleurs, indéfini, sans relation avec notre monde. Enfin, en 1831, il parle de «géométrie non-euclidienne», manifestant de la sorte une plus grande neutralité quant à la nature de cette géométrie qui devient simplement différente.

Gauss n'a rien publié sur ces recherches. Il savait fort bien que parler d'une géométrie, dans laquelle la somme des angles intérieurs ne serait pas 180°, venait en opposition avec les positions philosophiques de Kant, et, de ce fait, aurait provoqué un tollé d'indignation. Au-delà de la crainte de provoquer une véritable guerre philosophique, Gauss craignait de saper les bases même de la société. En effet, pour caricaturer sa pensée, si on ne peut même plus croire nos yeux, comment croire ceux qui, comme le duc d'Hanovre, font reposer leur pouvoir sur le droit divin?

Il fallut attendre les publications de Lobatschewsky (1793-1856) dans les années 1820 pour que ces idées soient rendues publiques. Pour le professeur de l'Université de Kazan, la géométrie d'Euclide et la géométrie non-euclidienne ont le même statut mathématique. Il reste maintenant à vérifier expérimentalement si l'univers est euclidien ou non.

L'autre fondateur de la géométrie non-euclidienne, Jaños Bolyai (1802-1860) comprend fort bien la révolution qu'implique l'acceptation de la géométrie non-euclidienne lorsqu'il écrit à son père en 1823: *«J'ai créé un nouvel univers à partir de rien.»*.

Ces premiers travaux ne feront l'objet d'études attentives qu'à partir de 1856. La géométrie non-euclidienne ne sera reconnue qu'après plusieurs années. Néanmoins, au début du XX^{e} siècle, presque tous les mathématiciens lui reconnaîtront le droit à la vie. Malgré tout, en 1925, le célèbre mathématicien et logicien Frege ne démord pas et s'exclame: *«Oserait-on qualifier d'astrologie les* Éléments *d'Euclide, cette œuvre jouissant d'une autorité inconstestable depuis plus de deux mille ans? Mais, si on ne l'ose pas, alors c'est la géométrie non-euclidienne qui doit être classée parmi les pseudo-sciences (astrologie, alchimie).»* Bien sûr, Frege est un anachronisme. Au début du siècle, presque tous les mathématiciens reconnaissaient la véracité mathématique de la géométrie non-euclidienne. Sa boutade nous montre tout de même la virulence des combats qu'a dû mener la géométrie non-euclidienne pour se faire connaître.

Ainsi, entre le début et la fin du XIX^{e} siècle, l'étude de la géométrie est passée d'une illustration de la réalité physique intuitivement vraie à l'élaboration de systèmes reposant sur des bases qui semblent défier l'intuition. Dans ce sens, Bolyai semble tout à fait justifié de parler de création à partir du néant. La géométrie n'est plus enracinée dans l'intuition de la réalité. Le lien entre système mathématique et réalité physique doit maintenant passer même au niveau des principes premiers par l'expérimentation. L'intuition géométrique ne semble plus maintenant qu'un vain mot.

De l'intuition à la pathologie

Ce phénomène de retrait face à l'intuition ne s'est pas cantonné à la géométrie. Nous avons mentionné au début d'une part l'importance de l'intuition physique dans le travail du mathématicien du siècle dernier, mais aussi le manque de fondement logique à tout l'édifice du calcul différentiel et intégral.

L'étude du niveau de représentabilité d'une fonction par une série, et en particulier par une série trigonométrique, comme celle de Daniel Bernoulli, amena les mathématiciens à une autre catastrophe, les *fonctions pathologiques.* Ces fonctions défient l'intuition géométrique. La première de ces fonctions à avoir été introduite en mathématiques est la fonction *caractéristique* des nombres rationnels, définie par Lejeune-Dirichlet en 1828:

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{R} &\rightarrow \{0,\ 1\} \\ x &\mapsto 1, \qquad x \in \mathbb{Q}, \\ x &\mapsto 0, \qquad \text{ailleurs}. \end{aligned}$$

Comment peut-on construire le graphique d'une telle fonction? Bientôt, de telles fonctions impossibles à tracer adéquatement le graphique se multiplièrent. Ainsi, cette fonction de Weierstrass qui est continue en tout point mais qui n'est différentiable en aucun point. N'est-ce pas tout à fait contraire à notre intuition? Que dire encore de la courbe de Peano qui permet de remplir complètement un cube?...

Parallèlement à ces fonctions, l'étude du domaine de convergence de séries trigonométriques obligèrent les mathématiciens à développer un langage nouveau pour parler de groupe de points de la droite réelle, groupe impossible de représenter graphiquement sur la droite, mais ayant des propriétés très précises. Sans support géométrique, comment être sûr de la justesse des raisonnements dans lesquels ils sont impliqués.

Suite à l'intrusion de ces objets en mathématiques, le manque de fondement à l'analyse, et plus généralement aux mathématiques, apparurent dans toute son horreur. Aussi, l'on se mit à la tâche. L'ensemble des réels fut «construit» à partir de prémisses essentiellement arithmétiques (les nombres naturels). Weierstrass, Dedekind proposèrent chacun une construction. Cantor développa sa théorie des ensembles et proposa aussi une construction des réels. Tout ceci dans le but de fonder l'analyse sur des bases non plus simplement intuitives mais sur des bases logiquement plus précises et organisées.

(Suite à la page 47.)

(Suite de la page 7.)

L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

LE XIX^e SIÈCLE: DU MATHÉMATICIEN DÉCOUVREUR AU MATHÉMATICIEN CRÉATEUR

Encore ici, les mathématiciens venaient de créer un univers nouveau formé d'objets irréels que sont ces nombres qu'on appelle pourtant réels.

Ce même phénomène de «création» se manifeste aussi en algèbre, alors qu'on commence à définir des structures sur des ensembles d'objets étranges comme les quaternions et bien d'autres.

L'homme à l'image de Dieu...

À la fin du XIX^e siècle, le travail de création des mathématiciens a atteint un tel niveau que l'on croit pendant un temps que la base logique des mathématiques était devenue parfaite. Au congrès international des mathématiques de Paris en 1900, Henri Poincaré affirme *«À présent, nous pouvons dire qu'on a atteint la rigueur parfaite.»*

L'homme créateur devenait-il un nouveau dieu? L'illusion ne dura guère. L'histoire se répète. Cette douce stabilité n'était qu'apparente, une nouvelle crise allait bientôt secouer les mathématiques... et nous n'en sommes pas encore sortis.

Bibliographie

— Roberto Bonola, *Non-Euclidean Geometry,* 1re édition italienne 1912, traduction anglaise 1955 (Dover).

— Morris Kline, Les fondements des mathématiques, *La Recherche,* N° 54, mars 1975, pp. 200 à 208.

— Imre Toth, La révolution non-euclidienne, in *La recherche,* février 1977, reproduit dans *La recherche en histoire des sciences, Paris 1983 (Seuil, Point N° S 37), pp. 241 à 265.*

— *B.L. van der Waerden, A History of Algebra, From al-Khwarizmi to Emmy Noether,* (Springer-Verlag), 1985.