UN LECTEUR NOUS ÉCRIT

Jacques Labelle

À propos de l'article de Lucien Boisvert (*Bulletin AMQ,* oct., 1986, Vol. XXVI, No 3, pp. 8-10), Gilbert Labelle a déjà résolu ce problème dans le cas le plus général et l'enseigne depuis plusieurs années dans les cours de *Théorie des nombres* à l'UQAM. Voici l'énoncé du problème sous sa forme générale:

Problème

Soit $n \geqslant 1$. Trouver toutes les suites $a_1, a_2, \ldots, a_n$ d'entiers naturels tels que $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$ soit également dans $\mathbb{N}$.

En langage géométrique, cet énoncé revient à trouver tous les vecteurs $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$ (parfois noté E^n) de longueur entière.

Solution

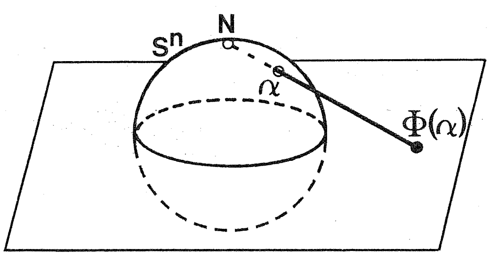
(Professeur Gilbert Labelle, UQAM, 1978)

Soit $S^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ la sphère de dimension n.

Soit $N = (0, 0, \ldots, 1)$ son «pôle-nord».

La projection dite «stéréographique» Φ donne une bijection entre $S^n \setminus \{N\}$ et $\mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire entre la sphère moins le pôle-nord et $\mathbb{R}^n$).

$\Phi: S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est définie géométriquement par la figure suivante quand $n = 2$:



Pour $x \in S^n \setminus \{N\}$, $\Phi(x)$ est le point de rencontre de la demi-droite, issue de N et passant par x, avec le «plan» $\mathbb{R}^n$.

Dans tout bon livre[1] de topologie, on trouve pour Φ et pour son inverse Ψ les expressions suivantes:

$$S^n \setminus \{N\} \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}^n$$

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \frac{x_2}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}\right)$$

$$\Psi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - 1, 2y_1, \ldots, 2x_n\right).$$

On observe que si $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{Q}$, alors
$$y_1 = \frac{x}{1 - x_{n+1}}, y_2 = \frac{x}{1 - x_{n+1}}, \ldots, y_n = \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \in \mathbb{Q}$$
et réciproquement.

C'est donc dire que pour trouver tous les points
$$(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in S^n$$
à coordonnées rationnelles, il suffit de prendre $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rationnels quelconques et de poser
$$(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \Psi(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Théorème (Gilbert Labelle)

La solution générale de l'équation
$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1 \text{ avec } x_i \in \mathbb{Q} \text{ est:}$$

$$x_1 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - 1}{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) + 1}, \quad x_2 = \frac{2y_1}{\sum y_i^2 + 1}, \quad x_3 = \frac{2y_2}{\sum y_i^2 + 1}, \ldots,$$

$$x_{n+1} = \frac{2y_n}{\sum y_i^2 + 1}$$

où $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont des rationnels arbitraires.

Corollaire

(Solution générale au problème de L. Boisvert en dimension «n»)

La solution générale en entiers naturels à l'équation:
$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = x_{n+2}^2 \text{ est:}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= t(r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2 - s^2) \\
x_2 &= 2tr_1s \\
x_3 &= 2tr_2s \\
&\ldots \\
x_{n+1} &= 2tr_ns \\
x_{n+2} &= t(r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2 + s^2)
\end{aligned}$$

où $t, r_1, r_2, \ldots, r_n$ et s sont des entiers naturels arbitraires.

Preuve

L'équation $\left(\frac{x_1}{x_{n+2}}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_{n+2}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x_{n+1}}{x_{n+2}}\right)^2 = 1$

est une solution en rationnels. Par le théorème de G. Labelle, on a donc pour certains rationnels $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les égalités suivantes:

$$\frac{\sum y_i^2 - 1}{\sum y_i^2 + 1} = \frac{x_1}{x_{n+2}}; \quad \frac{2y}{\sum y_i^2 + 1} = \frac{x_2}{x_{n+2}}; \ldots; \quad \frac{2y_n}{\sum y_i^2 + 1} = \frac{x_{n+1}}{x_{n+2}}.$$

Posons $x_1 = t(\sum y_i^2 - 1)$; $x_2 = t(2y_1)$; ...; $x_{n+1} = t(2y_n)$; $x_{n+2} = t(\sum y_i^2 + 1)$ et $y_1 = \frac{r_1}{s}$; $y_2 = \frac{r_2}{s}$; ...; $y_n = \frac{r_n}{s}$ (y_i sur le même dénominateur).

(1) *LABELLE, J.* Théorie des graphes, *Modulo Éditeur, 1981.*

On trouve finalement: $x_1 = t(r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2 - s^2)$

$$x_2 = t(2r_1 s)$$
$$\dots$$
$$x_{n+1} = t(2r_n s)$$
$$x_{n+2} = t(r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2 + s^2)$$

comme solution générale avec $t, r_1, r_2, \dots, r_n$ et $s \in \mathbb{N}$.

Remarques

1. Si on multiplie le tout par «t», on trouve une autre solution.
2. On peut avoir également les permutations des entiers $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$.

Cas particuliers

1) $n = 1$. On peut prendre les notations suivantes:

$$x_1 = x,\ x_2 = y \text{ et } x_3 = z.$$

La solution en entiers de $x^2 + y^2 = z^2$ est

$$x = t(r^2 - s^2),\ y = 2trs \text{ et } z = t(r^2 + s^2).$$

Ce sont les nombres pythagoriciens des triangles pythagoriciens.

2) $n = 2$ (Le problème de M. L. Boisvert)

(x, y, z) avec $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ où x, y et $z \in \mathbb{N}$.

La solution est:

$x = t(u^2 + v^2 - s^2)$

$y = t(us)$, $z = t(vs)$ et

$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = t(u^2 + v^2 + s^2)$; t, u, v et $s \in \mathbb{N}$.

Remarque finale

C'est un beau problème qui fait appel à une *projection stéréograhique* de la vraie sphère (Pôle Nord) sur le vrai plan, à la *géométrie:* vecteur, plan, longueur, sphère, demi-droite, à l'*algèbre* dans les calculs et à la *théorie des nombres.*

INFORMATIONS

Les coffrets-souvenirs des prix Roland Brossard et Frère Robert 1986 sont des œuvres originales de M. Roger Langevin, artiste-sculpteur de Mont-Laurier. M. Langevin a fait ses études à l'École des Beaux-Arts de Montréal. Il est maintenant connu en France et au Canada à cause de ses nombreuses expositions. Depuis 1975, il se consacre uniquement à la sculpture et à la céramique. Ces deux objets d'art, photographiés ci-dessous, seront présentés à un concours mondial.

Il a été offert à M. Pierre Gingras.

Il a été offert à M. André Boileau.