Chronique: *JEUX ET PROBLÈMES*

Jean-Marie Labrie

Le Comité de l'A.M.Q. a proposé cette chronique et le comité de rédaction de la revue aura à se pencher sur la façon de continuer cette chronique pour l'année 1987 lors de la réunion du 29 octobre prochain. Si vous désirez une autre formule, nous aimerions connaître vos goûts, vos préférences, vos suggestions et vos commentaires. N'hésitez pas à nous écrire et à donner vos opinions. C'est votre chronique et elle sera ce que vous voulez qu'elle soit et devienne...

Problème 29

Dans le concours mathématiques de l'A.M.Q. du niveau secondaire, on a demandé aux participants de montrer ce qui suit:
Si $x^2 = x + 1$, alors on a: $x^3 = 2x + 1$, $x^4 = 3x + 2$ et $x^5 = 5x + 3$.

On invite les lecteurs à élargir le problème.

a. À quoi correspond x^{12}?

b. À quelle puissance de x correspond l'expression: $1597x + 987$?

c. À quelle suite remarquable appartiennent tous les nombres entiers des expressions du 1er degré correspondant aux puissances entières de x?

*d. Quel nom porte l'une des racines de l'équation $x^2 = x + 1$?

Problème 30

Un peu d'histoire! Trouve le nom du mathématicien.

a. Ce mathématicien, né à Prague le 5 octobre 1781, était professeur de religion. Il donna le premier exemple en 1834 d'une fonction continue différentiable en aucun point. Le théorème qui porte son nom avec un autre mathématicien dit que «tout ensemble de nombres réels infini et borné a un point limite».

b. Ce mathématicien, né en 1608, fut un disciple de Galilée. Il fut professeur de mathématiques à Florence. À l'aide de méthodes qui, éventuellement, ont conduit au calcul intégral et différentiel, il trouva l'aire de l'arche de la cycloïde. Il est renommé également en physique.

c. Ce mathématicien est né le 25 octobre 1811 et il est mort en 1832. Ses travaux ne furent publiés qu'en 1846.

Problème 28

Montrer que, pour tout n, $(n + 1)^2 + (n + 4)^2 = (n + 2)^2 + (n + 3)^2 + 4$.

Solution suggérée

L'identité est facile à montrer. Sa signification est importante:

La différence entre deux sommes de carrés est 4:

Mais quelles sommes?

1) Soit quatre nombres séparés d'une unité d'un nombre et l'autre en commençant par le plus petit.
Les quatre nombres sont ordonnés par la relation: «être inférieur à»

2) On les met au carré; ces quatre nouveaux nombres sont ordonnés: 1er, 2e, 3e et 4e.

3) D'où, (1er + 4e) − (2e + 3e) = 4.

Exemples:

1) -2, -1, 0 et 1	$(4 + 1) - (1 + 0) = 4$.
2) 2,5; 3,5; 4,5 et 5,5	$(6{,}25 + 30{,}25) - (12{,}25 + 20{,}25) = 4$.
3) $\sqrt{3} - 1$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3} + 1$ et $\sqrt{3} + 2$	$(4 - 2\sqrt{3} + 7 + 4\sqrt{3}) - (3 + 4\ 2\sqrt{3}) = 4$.

Problème 27

Un fermier remarque qu'à chaque douzaine d'œufs recueillis, il existe un œuf plus léger ou plus lourd que les autres. En trois pesées ou moins sur une balance à plateaux, peut-il déterminer l'œuf qui n'est pas comme les autres? Si oui, comment?

Solution suggérée par Mireille et Gérard Des Aulniers

1re mesure: On choisit 8 œufs, numérotés 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8.

Deux solutions sont possibles: A et B

A $\underbrace{\lfloor 1\ 2\ 3\ 4 \rfloor}_{X} = \underbrace{\lfloor 5\ 6\ 7\ 8 \rfloor}_{Y}$ **B** $\underbrace{\lfloor 1\ 2\ 3\ 4 \rfloor}_{X} \neq \underbrace{\lfloor 5\ 6\ 7\ 8 \rfloor}_{Y}$

Considérons la **situation A**

On choisit les œufs numérotés 9, 10, 11 et un œuf correct numéroté 5.

Deux situations sont possibles: C et D.

2e mesure: $\lfloor 9\ 10 \rfloor \overset{C}{=} \lfloor 11\ 5 \rfloor$ ou $\lfloor 9\ 10 \rfloor \overset{D}{\neq} \lfloor 11\ 5 \rfloor$

- **12 est en litige**

$\lfloor 9 \rfloor \overset{E}{=} \lfloor 10 \rfloor$ ou $\lfloor 9 \rfloor \overset{F}{\neq} \lfloor 10 \rfloor$

- **11 est en litige**
- **On le sait par D**
  9 ou 10 sont en litige

Considérons la **situation B** où les poids des plateaux X et Y sont **différents.**

Stratégie: Avant de faire la 2e mesure, on enlève 2 œufs, par exemple numérotés 1 et 4 dans X et un œuf numéroté, disons 5, dans Y.

Il suffit d'avoir trois œufs dans chaque plateau; ce qui se présente comme suit: on doit avoir 6 et 7 dans X; 3 et 11 dans Y. 11 est correct.

On est prêt pour la 2e mesure et on peut avoir deux situations: G et H.

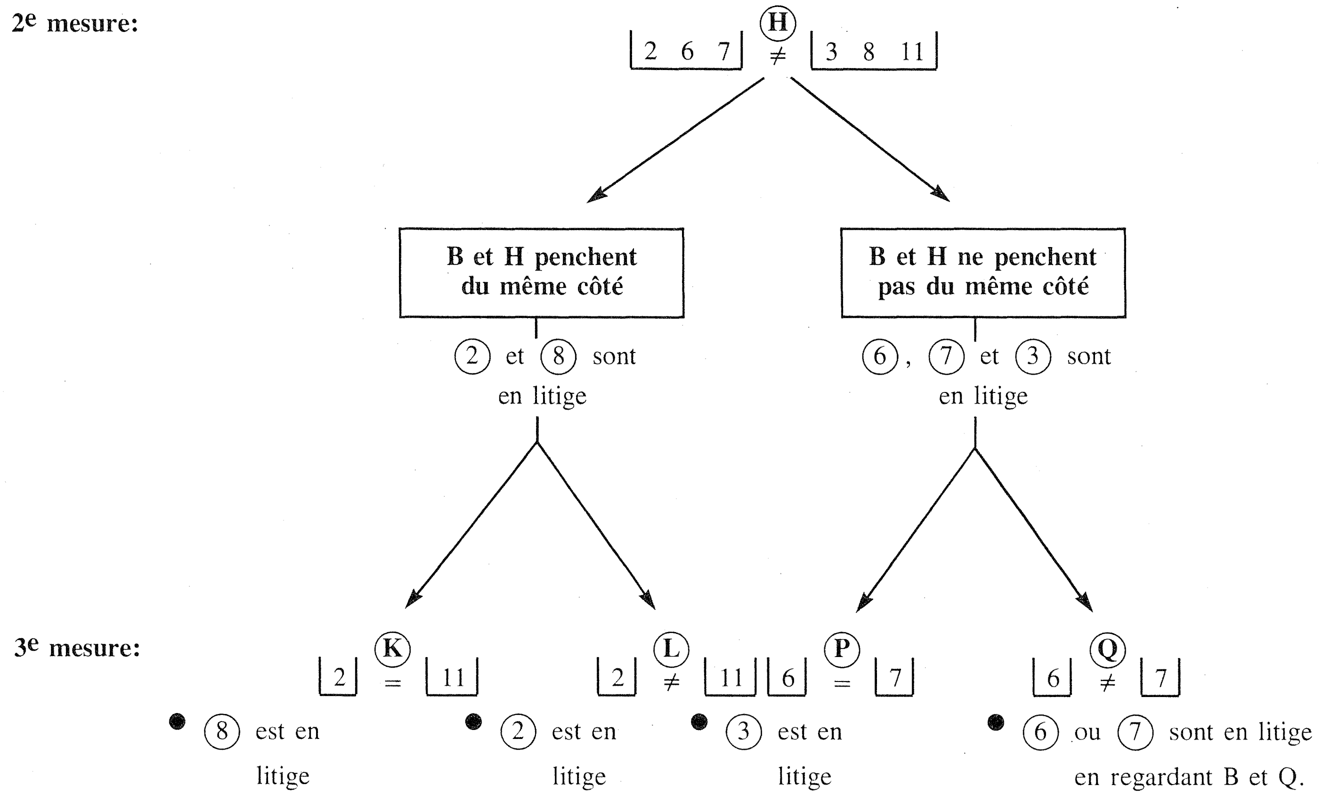
$\lfloor 2\ 6\ 7 \rfloor \overset{G}{=} \lfloor 3\ 8\ 11 \rfloor$

Les œufs numérotés 1, 4 et 5 sont en litige

3e mesure: $\lfloor 1 \rfloor \overset{I}{=} \lfloor 4 \rfloor$ $\lfloor 1 \rfloor \overset{J}{\neq} \lfloor 4 \rfloor$

- 5 est en litige
- 1 ou 4 sont en litige en regardant les positions de J et de B.

Considérons maintenant la situation H



Résumé de la solution suggérée par Mireille et Gérard Des Aulniers