ACTIVITÉS D'ENTRAÎNEMENT À LA PERCEPTION STRUCTURALE D'OBJETS POLYÉDRIQUES

Vincent Papillon, professeur, Collège Brébeuf
Dominique Dion, étudiant U. de M.
Richard Pallascio, professeur invité, UQAM
Membres du Groupe de Recherche en Topologie Structurale

(Suite du numéro de décembre 1985.)

II. Espace perceptif et espace représentatif

La deuxième activité en est une d'entraînement à la perception des polyèdres par le dessin.

Cette activité porte sur la *transfiguration* d'un modèle spatial, un hexaèdre, en deux genres de représentations graphiques: *projectives* et *topologiques,* après quoi une analyse de ces figures dans le plan nous amène à de nouveaux polyèdres. Un effort de perception du mouvement est nécessaire pour bien suivre les transformations géométriques qui se produisent.

Projection de l'hexaèdre

Le modèle choisi est un hexaèdre très irrégulier ayant quatre faces quadrilatérales et deux triangulaires. [Figures 8.] Si on le bascule sur ses six faces l'une après l'autre, on verra apparaître à chaque fois un polyèdre qui semble tout à fait différent tant les directions des arêtes sont variées, aucune d'elles n'est parallèle à une autre. Il existe toutefois, comme nous le verrons plus loin dans l'analyse de son graphe, une certaine régularité dans la *structure*.

La première étape est de réaliser une vue en transparence de l'hexaèdre donné, laissant voir tous ses sommets et arêtes, en traçant par des lignes pointillées les arêtes cachées. Pour que le dessin montre tous les éléments, il faut se placer d'un point de vue où on ne voit pas de faces perpendiculaires au plan de projection, c'est-à-dire dans une position ne présentant pas de faces vues de profil. [Figures 9, au haut et à gauche.]

Passage de la projection au graphe

À partir d'une déformation de la projection, il s'agit de tracer un graphe de l'hexaèdre. Cette opération consiste à ramener sur un même plan tous les sommets et arêtes de la figure. Pour y parvenir d'une manière simple, on redessine d'abord le polygone que déterminent les arêtes sur le contour de la projection et à l'intérieur duquel on trace au choix: soit les autres arêtes de la partie visible, soit les arêtes de la partie cachée. Puis, on situe à l'extérieur du polygone les autres sommets et arêtes, dans le premier cas ceux de la partie cachée, dans le deuxième ceux qui sont visibles, en raccordant les bonnes liaisons avec les sommets respectifs. Les choses se passent comme si on avait écrasé la figure. On obtient ainsi des graphes plans. [Figures 9, à droite.]

La projection peut déjà être interprétée comme un graphe du polyèdre, en oubliant l'effet de profondeur et en considérant les arêtes cachées de même nature que les autres; mais cette version comporte des superpositions d'arêtes.

Maintenant, afin d'avoir une image du graphe plus facile à lire, il est préférable de le tracer à nouveau, cette fois de la façon la plus régulière possible. Il suffit alors de compter les sommets situés sur le pourtour du graphe et de les reporter sur un polygone régulier correspondant, ensuite on distribue régulièrement les autres sommets et arêtes à l'intérieur du polygone en complétant les régions. Quel que soit le choix de la projection au début et les déformations, le tracé final sera inévitablement un des trois graphes isomorphes de l'hexaèdre. [Figures 10, en haut.]

Analyse du graphe

Nous constatons à l'examen des trois graphes qu'ils possèdent une symétrie bilatérale. Notre hexaèdre aurait donc pu être construit symétriquement. À ce moment là, les sommets, arêtes et faces se répartissent régulièrement autour d'un axe imaginaire ayant deux pôles par lesquels passent toutes les sections qui divisent le polyèdre en moitiés égales. Ces deux pôles se situent sur un sommet, au milieu d'une arête ou au centre d'une face. Dans le graphe de l'hexaèdre, ce sont un sommet unique, parce qu'il est le seul à avoir un certain nombre d'arêtes incidentes, i.e. 4, et une arête isolée, parce qu'elle est bordée de régions et de sommets incidents égaux, plus précisement de sommets entourés de régions semblables. [Figures 10, au haut.]

Ainsi, en passant par ces deux pôles, on découvrira qu'il y a quatre sections qui partagent le graphe en moitiés topologiquement égales. Deux d'entre elles étant équivalentes, retenons-en que trois réellement différentes. À la rencontre de chaque arête, une section crée un nouveau sommet et, d'un sommet à l'autre, une arête, et forme enfin par ce cycle une nouvelle région commune aux deux moitiés du graphe. [Figures 10, au centre.]

Graphes des moitiés de l'hexaèdre

Ensuite, suivant les trois sections, divisons le graphe de l'hexaèdre de manière à extraire les moitiés-distinctes formant séparément de nouveaux graphes. Une première

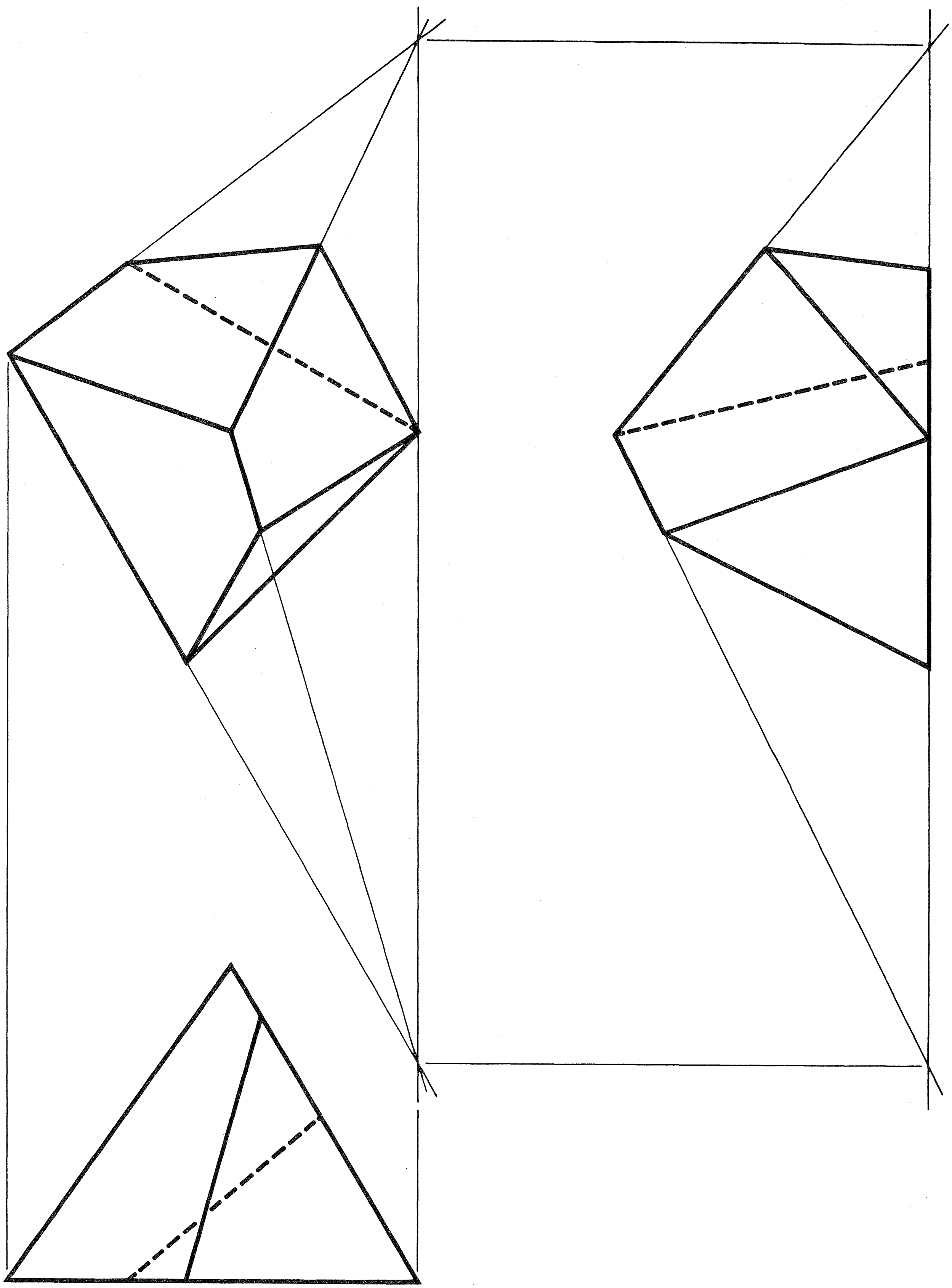

Figure 8
Trois vues orthogonales de l'hexaèdre

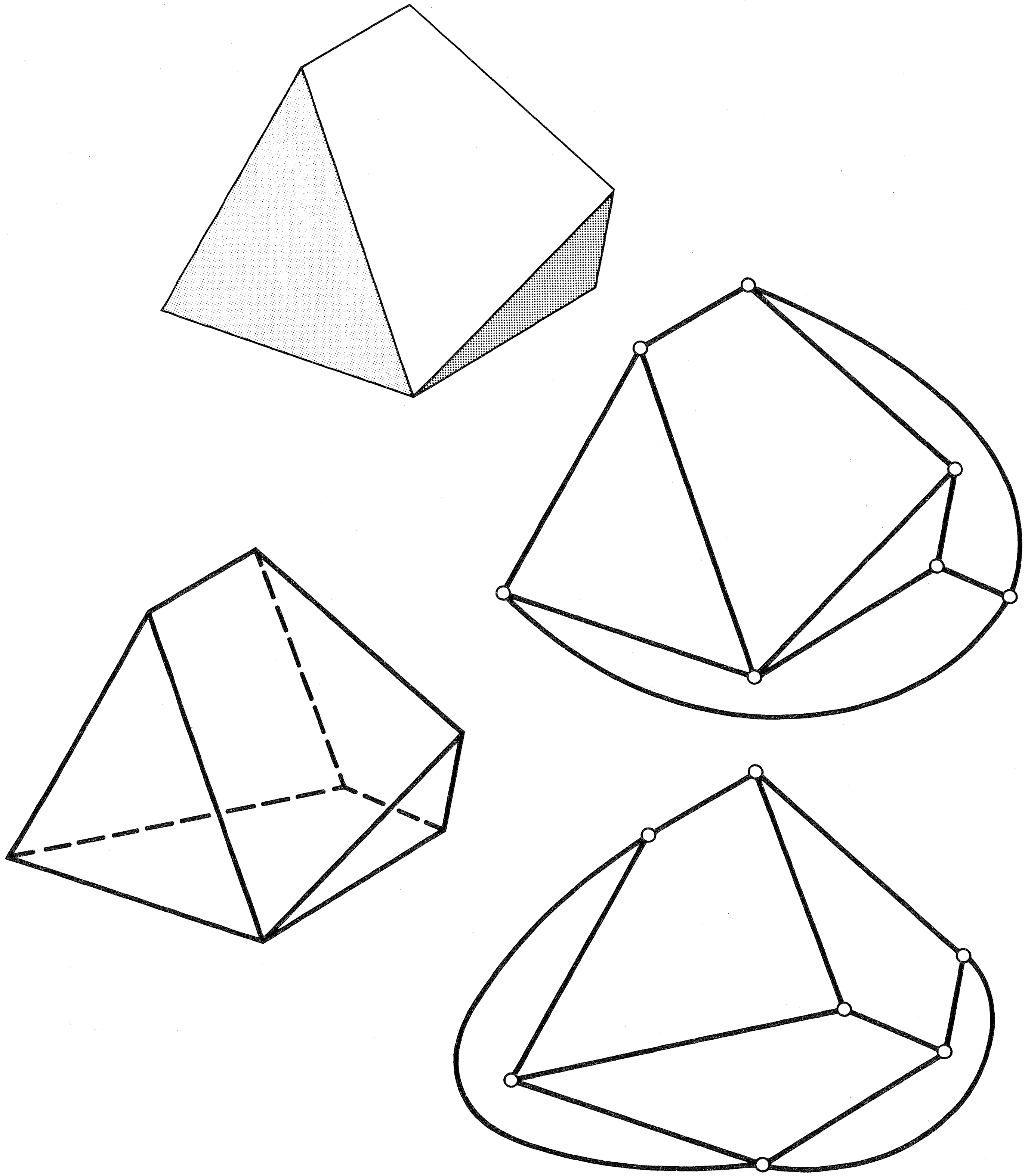

Figure 9
Au haut: l'hexaèdre construit en carton.
À gauche: une projection en transparence.
À droite: deux graphes faits d'après la projection.

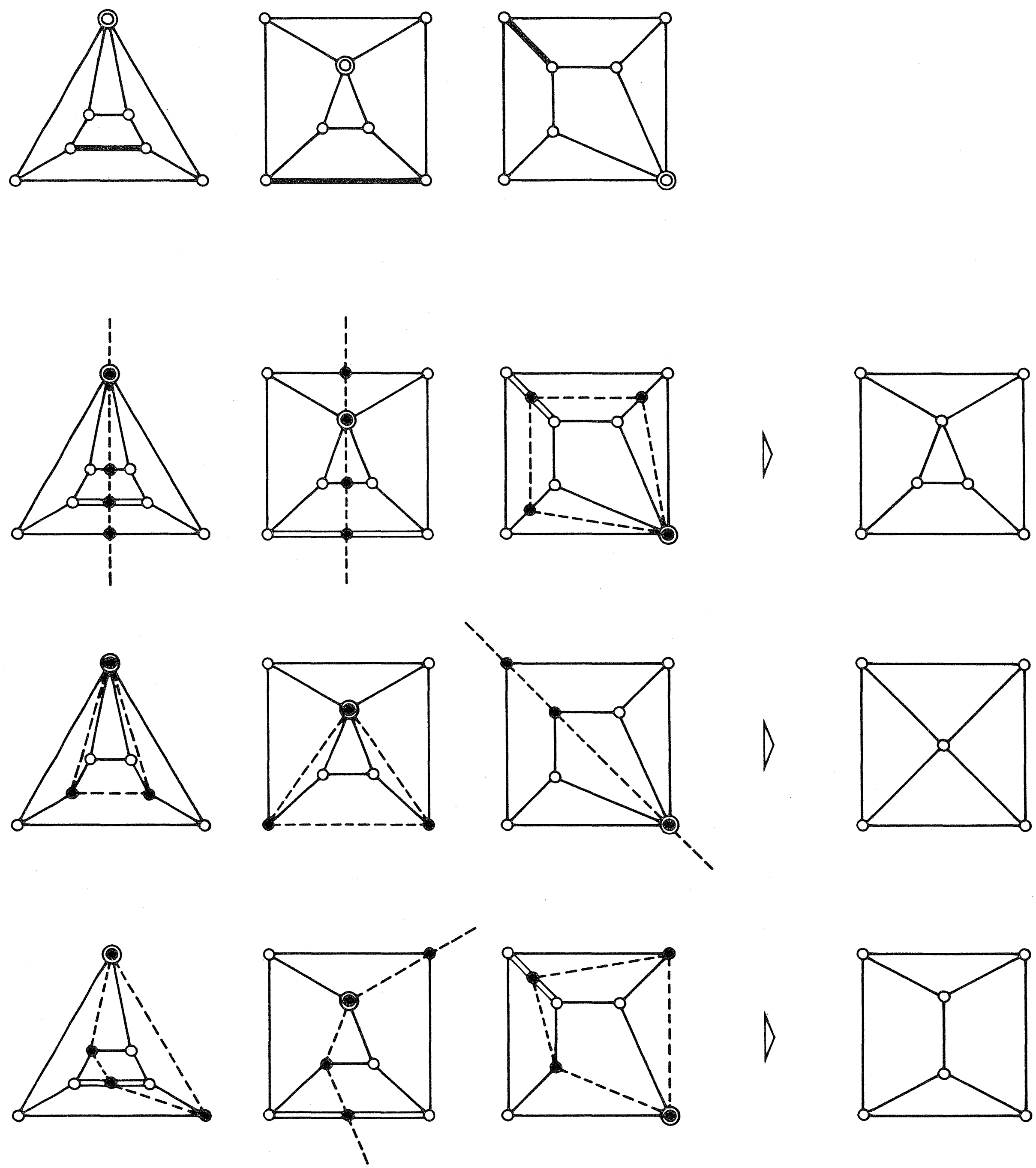

Figure 10

Au haut: les trois graphes isomorphes de l'hexaèdre.
Le sommet unique est encerclé et le trait gras marque l'arête isolée.
Au centre: les divers chemins que suivent les trois sections.
À droite: les trois graphes des moitiés de l'hexaèdre.

moitié issue d'une section quadrilatérale nous redonnera le graphe de départ, celui de l'hexaèdre; une section triangulaire, traversant le long de l'arête isolée, produira le graphe d'une pyramide quadrilatérale; la troisième moitié sera le graphe d'un tronc de pyramide triangulaire, que nous identifierons plutôt comme un prisme triangulaire. [Figures 10, à droite.]

Développements des demi-hexaèdres

Nous avons vu ci-dessus que la projection de l'hexaèdre figure également son graphe lorsqu'elle est perçue comme tel. Inversement, un graphe paraîtra comme étant la projection d'un polyèdre, si on imagine une élévation ou un renfoncement en perspective des sommets situés au centre du graphe. En observant de la sorte les trois graphes des demi-hexaèdres, nous voyons se détacher du plan, l'hexaèdre, la pyramide et le prisme. Partant de ces vues, la dernière étape de cette activité consiste à tracer, par le rabattement des faces, un développement plan pour chacun de ces trois polyèdres. Les longueurs d'arêtes et l'ouverture des angles pouvant être variés, pour simplifier la tâche, les faces quadrilatérales des polyèdres seront représentées par des carrés et les faces triangulaires par des triangles équilatéraux. [Figures 11.] Ces développements aux faces régulières sont possibles pour la pyramide et le prisme, mais il faudrait remplacer deux carrés par des trapèzes isocèles pour qu'un hexaèdre soit réalisable. En tout, il existe 45 découpages pour l'hexaèdre, 6 pour la pyramide et 8 pour le prisme.

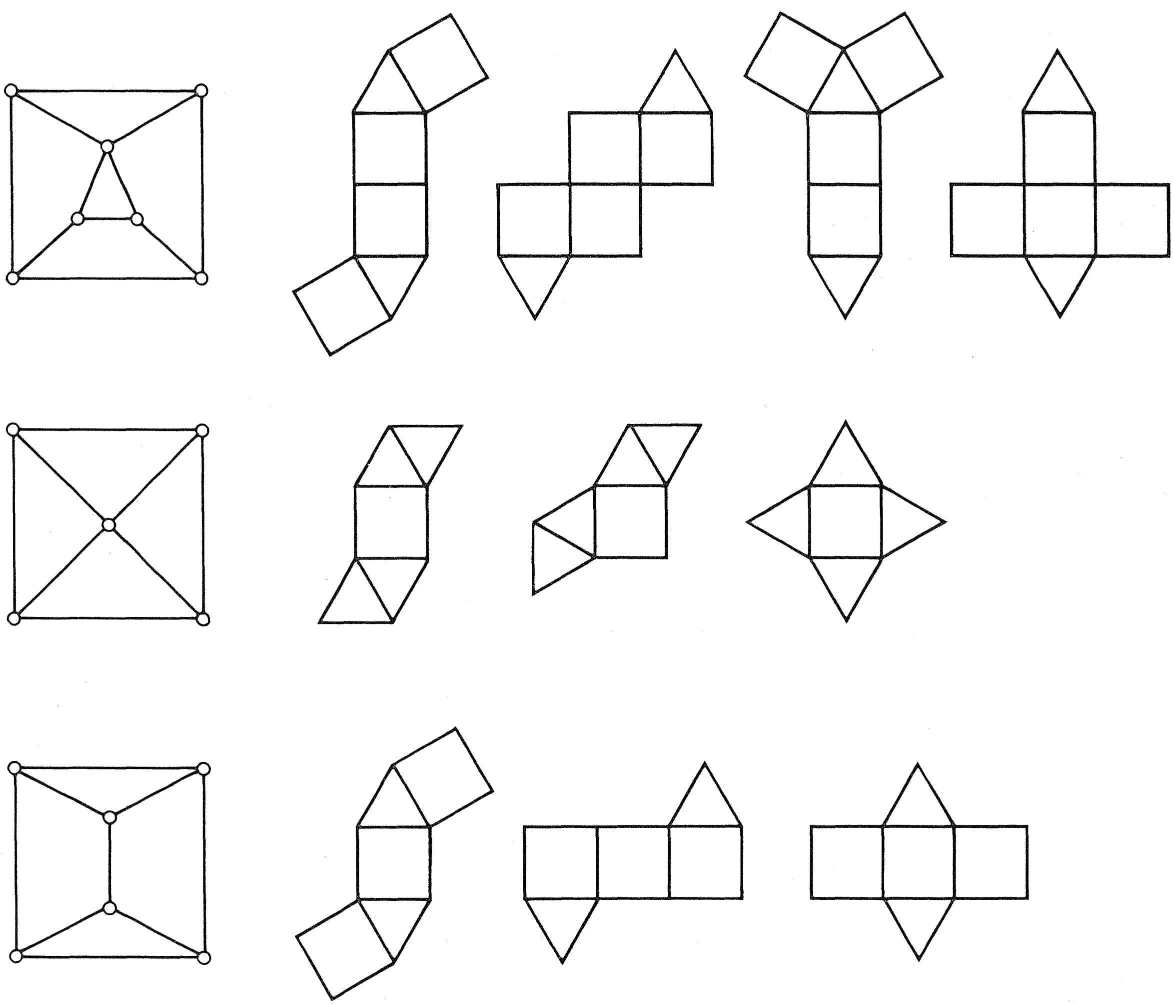

Figure 11

Les graphes des trois nouveaux polyèdres et leurs développements symétriques.

(à suivre)