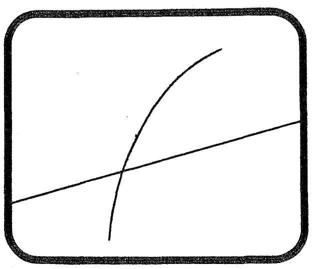
Louis Charbonneau, U.Q.A.M.

Un angle oublié: l'angle corniculaire

Il est parfois surprenant de constater que certaines fonctions en apparence simples se révèlent réfractaires à une définition. Tentez par exemple de définir la tangente.

Définition 1. La tangente à une courbe en un point de cette courbe est une droite passant par ce point et n'ayant que ce point en commun avec la courbe.

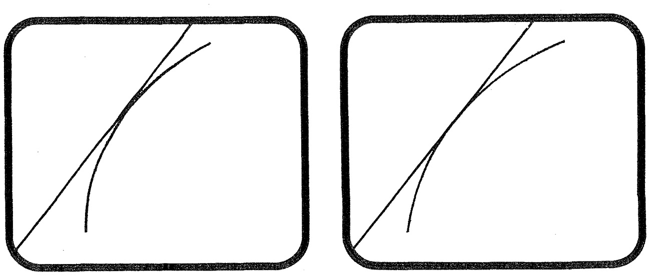
Accepter cette définition provoque automatiquement le contre-exemple suivant:



Oui, bien sûr! Je n'ai pas été assez précis. Modifions la définition:

Définition 2. La tangente à une courbe en un point de cette courbe est une droite passant par ce point et qui ne *touche* la courbe qu'en un seul point de la courbe.

Le mot touche, même s'il n'efface pas toute ambiguïté, nous rapproche du sens cherché. Néanmoins, dans le sens commun, si deux objets se touchent, ils demeurent entièrement distincts l'un de l'autre. Lorsqu'on veut illustrer une tangente à une courbe, on est physiquement confronté à cette difficulté. Regardons attentivement les deux figures suivantes:



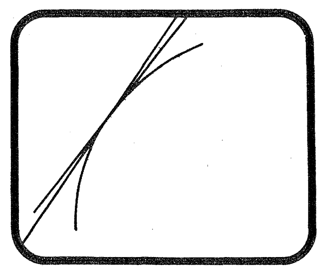
Dans la première, la droite frôle la courbe. Elle la touche, mais n'a aucun point en commun avec elle. Dans la seconde, la droite entre légèrement dans la courbe. Dire que la droite n'a qu'un point en commun avec la courbe est clairement affirmer une fausseté. Notre concept abstrait de tangente se situe quelque part entre ces deux représentations picturales d'une droite *touchant* une courbe.

Euclide s'est montré à peine plus adroit que nous dans ses *Éléments* (Livre 3, déf. 2):(1)

Définition d'Euclide: *Une ligne droite est dite toucher un cercle lorsque, rencontrant le cercle et étant produite, elle ne coupe pas le cercle.*

Cette définition oppose l'idée de toucher et celle de couper. Néanmoins, bien que l'opposition des deux termes éclaire la pensée du géomètre, elle laisse place à interprétation.

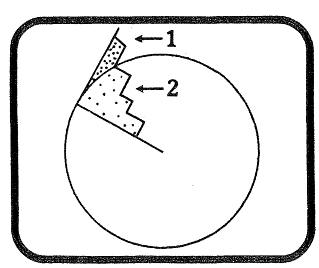
L'impossibilité d'une représentation graphique adéquate de la notion de tangente a des conséquences que les professeurs de C.E.G.E.P. connaissent bien et qu'ils rencontrent dans leurs cours de Mat-103 (Calcul différentiel et intégral). Ainsi, l'unicité de la tangente en un point de la courbe ne semble pas à priori évidente. En effet, à cause de l'épaisseur du trait ou de la courbe aussi bien que de celle de la droite, il est presque toujours possible de tracer plusieurs droites qui donnent l'impression de satisfaire la «définition» de tangente.



On conçoit le désarroi d'un étudiant dont l'expérience semble montrer qu'il peut tracer plusieurs tangentes à une courbe et à qui on demande de trouver *la* pente de *la* tangente à une courbe en un point.

D'ailleurs, selon Aristote, Prothagoras aurait mis en doute l'existence de la tangente au sens mathématique en se basant sur le fait qu'une règle matérielle ne touche pas un cercle matériel en un seul point.

Le problème de la façon dont la tangente «touche» le cercle s'est cristallisé mathématiquement dans la notion d'angle de contact. On discerne deux genres d'angles de contact: 1) l'angle corniculaire est l'«angle» compris entre une courbe et sa tangente, d'où le nom corniculaire, en forme de corne, 2) l'angle du demi-cercle est le complémentaire de l'angle corniculaire.



Dans son étude du cercle, Euclide a senti le besoin d'énoncer la propriété essentielle de ces angles (Livre III, proposition 16):

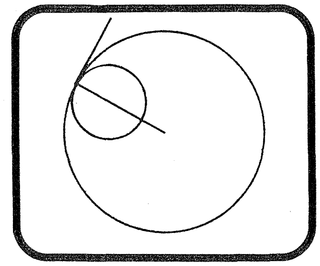
> Une ligne droite perpendiculaire au diamètre d'un cercle et passant par l'extrémité [de ce diamètre] tombera hors du cercle, et dans l'espace entre la ligne droite et la circonférence, une autre ligne droite ne peut être insérée; de plus, l'angle du demi-cercle est plus grand, et l'angle restant [l'angle corniculaire est moindre que tout angle aigu quel qu'il soit. [C'est moi qui souligne]

Cette dernière propriété des angles de contact n'aura de cesse d'intriguer les géomètres. Elle en révèle leur nature particulière. Alors qu'on sait qu'un angle corniculaire est inférieur à tout angle aigu, il est impossible d'établir dans quelle proportion un angle corniculaire est plus grand ou plus petit qu'un autre angle. C'est pourquoi Proclus (412-485), dans son *Commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide,* se demande si un angle corniculaire peut être bissecté comme c'est le cas d'un angle rectiligne, tel que montré à la proposition 9 du Livre 1 des *Éléments*).[3]

Moyen-Âge et Renaissance[4]

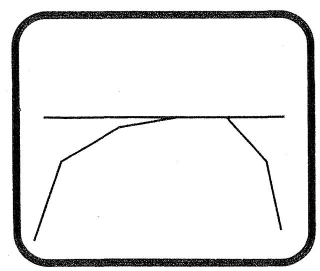
La nature des angles de contact suscita des discussions jusqu'à la fin du XVII^e siècle. Plusieurs mathématiciens de haut niveau publièrent le fruit de leur réflexion à cet égard, principalement à l'occasion de nouvelles éditions des *Éléments* d'Euclide. Ainsi, Johannes Campanus, un érudit du XIII^e siècle, croit que l'angle corniculaire viole le principe de continuité qui veut que passant du plus petit au plus grand, il faille passer par toutes les valeurs intermédiaires. En effet, raisonne-t-il, si l'on fait tourner le diamètre d'un cercle autour du point d'intersection avec le cercle, l'angle formé entre la position originale du diamètre et le diamètre ayant tourné demeure à tout moment un angle aigu. Par la proposition 16 d'Euclide citée plus haut, cet angle est nécessairement inférieur à l'angle du demi-cercle. Toutefois, aussitôt que le diamètre mobile se confond avec la tangente, cet angle surpasse l'angle du demi-cercle car il devient un angle droit. Nous sommes donc passés d'un angle inférieur à l'angle du demi-cercle à un angle supérieur à l'angle du demi-cercle sans que cet angle n'égale à aucun moment l'angle du demi-cercle. Pour sauver le principe de continuité, Campanus en conclut que l'angle corniculaire, ainsi que son complémentaire, l'angle du demi-cercle, ne sont pas des angles.

Cardan (1501-1576) pour sa part ordonne les angles corniculaires en remarquant que deux angles corniculaires construits à partir de deux cercles de rayons différents sont différents, celui du petit cercle étant plus grand que celui du grand cercle. (voir la figure) Il en déduit le paradoxe suivant: une quantité [l'angle aigu] peut diminuer indéfiniment et pourtant rester plus grande qu'une autre qui augmente indéfiniment [l'angle corniculaire].



Peletier, éditeur en 1557 des *Éléments* d'Euclide, remarque, ordonnant les angles corniculaires comme l'avait fait Cardan, que les angles corniculaires ne sauraient être des quantités mesurables, et donc non des angles, et que d'ailleurs la véritable nature des angles repose sur la façon de couper et non le mode de «contact». Ainsi, la tangente n'est pas inclinée sur le cercle, qui n'en diverge ni d'un côté ni de l'autre.

François Viète (1540-1603) approche le problème de façon tout à fait originale. Considérant le cercle comme un polygone d'un nombre infini de côtés, la tangente en un point passe alors par un côté du polygone. On ne peut alors parler d'angle entre la tangente et ce côté puisqu'ils se confondent sur la longueur du côté.



Angle corniculaire et calcul différentiel[5]

À partir de cette époque, on ne considère plus les angles corniculaires comme faisant partie de la même catégorie que celle des angles rectilignes. Certains, comme Galilée (1564-1642) et Wallis (1616-1703), pensent qu'on peut toutefois dans les calculs identifier l'angle corniculaire à un angle nul. D'autres, comme Leibniz (1642-1717), les fondateurs du calcul différentiel et intégral, les considèrent dans un certains sens différent d'un angle nul.

Il est révélateur de voir les fondateurs du calcul différentiel et intégral s'attacher à conserver une personnalité non nulle à l'angle corniculaire. La raison en est fort simple. Comme les infinitésimaux, l'angle corniculaire, nous l'avons vu dans les arguments des mathématiciens du Moyen-Âge et de la Renaissance, ne satisfait pas une des propriétés essentielles des grandeurs, en l'occurrence l'axiome d'Archimède qui dit: Étant donné deux grandeurs A et B, si $A \leqslant B$, alors il existe un nombre entier n tel que $n A \geqslant B$. Autrement dit, même si A est plus petit que B, en répétant A un certain nombre de fois, il est possible d'obtenir une grandeur plus grande que B. Les objets mathématiques satisfont en général cet axiome. Il y en a un toutefois que beaucoup d'étudiants de CEGEP manipulent allègrement et qui ne satisfait pas cet axiome: le dx tel qu'employé dans les «preuves» des formules de dérivation, ce dx qui parfois vaut zéro et par lequel pourtant il est parfois possible de diviser une expression...

Fermat (1608-1665) utilisa extensivement cette quantité ayant parfois les propriétés du zéro, parfois celles d'un nombre très petit mais néanmoins différent de zéro. Ce fut toutefois Leibniz qui lui donna ses lettres de noblesse. Il n'est pas surprenant que Leibniz, de même que Newton, se réfèrent à l'angle corniculaire pour justifier géométriquement les propriétés non-archimédiennes des infinitésimaux. La légitimité de règles symboliques, telles que celles décrites par Leibniz et Newton pour leur calcul différentiel, ne pouvait alors reposer que sur une représentation géométrique. L'angle corniculaire justifia des règles qui par ailleurs débouchaient sur des résultats que l'on savait justes. Il fallut attendre le XIXe siècle pour que les fondements du calcul différentiel se dégagent de telles intuitions géométriques après que celles-ci se furent révélées parfois trompeuses.

Conclusion

Pourquoi les discussions sur les angles de contact se prolongèrent-elles depuis le début des mathématiques grecques jusqu'à l'aube des temps modernes?

Les moteurs de cette discussion sont multiples. D'abord et avant tout le manque de rigueur de la définition d'angle. La définition donnée par Euclide porte déjà à interprétation (Livre I):

Définition 8: *Un angle plan est l'inclinaison réciproque de deux lignes planes qui se rencontrent et qui ne sont pas placées dans la même direction.*

Définition 9: *Et lorsque les lignes qui contiennent l'angle sont droites, l'angle est dit rectilinéaire.*

Il fallut attendre 1846 pour Möbius définisse l'angle comme la mesure d'une rotation. De par cette définition, l'«angle» corniculaire correspond clairement à un angle de mesure nulle. Mais cette définition non-équivoque fut donnée après les travaux de Cauchy (vers 1820-1830) sur les fondements du calcul différentiel et intégral, travaux qui en expurgèrent le calcul de la notion d'infinitésimal.

L'ambiguïté des rapports entre grandeurs et mesures numériques de celles-ci ajouta à la confusion. De cette ambiguïté découle les arguments de Campanus et de Cardan. Enfin, le manque de définition précise de la tangente à une courbe n'améliora pas la qualité des analyses. Il fallut attendre les travaux de Descartes (1596-1650) et surtout de Fermat (1608-1665) pour que la tangente soit définie comme la droite limite des sécantes. Par le biais de cette nouvelle définition, on pouvait aborder numériquement le calcul des tangentes. La géométrie analytique permettait ainsi la naissance de son plus glorieux rejeton: le calcul différentiel et intégral.

Cette histoire d'une obscure notion aujourd'hui tombée dans l'oubli me laisse quelque peu perplexe. Dans les cours d'introduction au calcul différentiel, on utilise la tangente pour rendre la dérivée plus concrète. Mais peut-on s'attendre à ce que les étudiants aient une vision claire de cette première notion sur laquelle on fait reposer celle plus abstraite de dérivée. J'aimerais bien pouvoir interroger quelques étudiants à ce propos. Si l'histoire de mathématiques peut nous être utile dans notre enseignement, c'est probablement par le biais de la connaissance de l'évolution de telles conceptions, souvent erronées et aujourd'hui oubliées. Celles-ci nous dévoilent des facettes que notre vision moderne, filtrée par des siècles d'un ardu travail, ne perçoit plus mais qui peuvent tout naturellement se présenter à un jeune esprit encore «innocent».

NOTES

(1) Traduction libre de l'anglais. Voir Euclid, *The Theiteen Books of The Elements,* Traduction, introduction et commentaires de Sir Thomas Heath, 3 tomes, 2e édition, 1925. (Réimpression Dover 1956)

(2) Heath, Thomas L., *A Manual of Greek Mathemathics,* 1931. (Réimpression Dover 1963) p. 118.

(3) Proclus, *A Commentary of the First Book of Euclid's Elements,* traduit et commenté par Glenn R. Morrow, Princeton Univ. Pr., 1970, p. 211. Le mot corniculaire vient de Proclus.

(4) Euclid, opus cit., la note de la proposition 16 du livre III, tome 2, pp. 39-43.

(5) Boyer, Carl B., *The History of The Calculus and its Conceptual Development,* 1949. (Edition Dover, 1959). Hofmann, Joseph, E., *Leibniz in Paris, 1672-1676, His Growth to Mathematical Maturity,* Cambridge Univ. Pr., 1974, pp. 12-15.