Chronique:

JEUX ET PROBLÈMES

Jean-Marie Labrie

Cette chronique existe depuis trois ans. Vingt-quatre jeux ou problèmes ont été proposés. Nous avons toujours besoin de votre participation soit en envoyant les solutions aux problèmes suggérés, soit en proposant d'autres jeux ou problèmes. Nous acceptons les commentaires concernant la résolution de problèmes sous tous ses aspects.

Pour les deux problèmes suivants, nous faisons appel à tous les membres des trois régions ci-dessous:

1. Montréal-Centre, représenté par Mme Louise Trudel.
2. Montréal-Nord, représenté par Mme Huguette Robillard.
3. Montréal-Sud, représenté par M. Yves Bussière.

Bon succès!

Problème 23

Soit x_1, x_2, x_3 et x_4 quatre termes consécutifs d'une suite géométrique. Montrer que la proposition suivante est vraie:

$$(x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 + (x_4 - x_2)^2 = (x_1 - x_4)^2.$$

Problème 24

Chaque lettre représente un chiffre de 0 à 9 (et un seul). Trouve, à l'aide de l'égalité suivante:

$$(DIX)^2 + (UN)^2 = CENTUN$$

la valeur de chaque lettre.

Problème 21

Tout le monde connaît en français le mot «ABRACADABRANT» qui vient du mot cabalistique grec (ABRACADABRA». Or, le professeur célèbre POLYA a publié, en 1966, un livre intitulé *«La découverte mathématique»*. Dans son introduction sur le fameux *Triangle de Pascal,* il demande de trouver le nombre total de façons différentes d'écrire le mot «ABRACADABRA» dans la représentation suivante:

```
          A
         B B
        R R R
       A A A A
      C C C C C
     A A A A A A
      D D D D D
       A A A A
        B B B
         R R
          A
```

Il existe une méthode qui n'exige pas trop de patience. Quelle est cette méthode? Serait-elle liée au Triangle de Pascal? Quel est donc ce nombre de possibilités de présenter ce mot «ABRACADABRA»?

Solution suggérée

Le «Triangle de Pascal» est une disposition de nombres très riche, qui peut être utilisée quand on veut introduire des élèves à des mathématiques plus sophistiquées. Les élèves apprennent tôt son utilité; c'est un outil qui permet d'épargner du temps et qui n'exige pas beaucoup de motivation pour bien s'en servir.

Revenons au problème 21. Les élèves prennent conscience rapidement que ce problème contient un très grand nombre de possibilités et il est facile de perdre patience si l'on prend une méthode de dénombrement par essais et erreurs. Heureusement, il y a une méthode claire et sûre. Les conditions initiales du problème établissent que nous devons partir du sommet A.

Il y a évidemment une et une seule façon de partir du point A. On le remplace par le nombre 1.

```
    1
   B B
  R R R
   etc.
```

L'observation permet de révéler qu'il y a une seule façon de se rendre en B. On peut remplacer chaque B par un 1. Ce qui donne:

```
    1
   1 1
  R R R
   etc.
```

Regardons les trois «R» de la 3^e rangée. Le R le plus à gauche et le R le plus à droite de la 3^e rangée peuvent être atteints d'une seule façon, à partir de A via B au-dessus. C'est également vrai pour chacune des lettres qui sont à l'extérieur de la moitié des rangées données. On remplace chacune de ces lettres par 1:

```
          1
         1 1
        1 R 1
       1 A A 1
      1 C C C 1
     1 A A A A 1
      D D D D D
         etc.
```

Examinons le R qui demeure dans la 3^e rangée. On peut l'atteindre de deux façons: de l'un des deux «B» qui ont été remplacés par des 1. On remplace ce R par 2. La 3^e rangée est complètement déterminée.

Continuons l'analyse sur la 4e rangée. Nous avons déjà décidé pour les deux A extérieurs, nous n'avons qu'à considérer les deux A à l'intérieur. Chacun de ces A peut être atteint à partir des R, (remplacés par 1 et 2), de trois façons; ce qui donne:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad C \quad C \quad C \quad 1 \\ \text{etc.} \end{array}$$

À partir de cette étape maintenant, les élèves peuvent reconnaître que c'est la méthode qu'on utilise pour construire le Triangle de Pascal et ils procèdent ensuite rapidement à la solution générale:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \\ 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \\ 56 \quad 70 \quad 56 \\ 126 \quad 126 \\ 252 \end{array}$$

Il y a donc 252 façons différentes de présenter le mot «ABRACADABRA».

Note supplémentaire

Les élèves peuvent avoir beaucoup de satisfaction d'utiliser la même technique en essayant un problème qui avait été proposé au 19e siècle par Master Sam Loyd. En combien de chemins, pouvons-nous faire avec le palindrome suivant:

$$\begin{array}{c} W \\ W \quad A \quad W \\ W \quad A \quad S \quad A \quad W \\ W \quad A \quad S \quad I \quad S \quad A \quad W \\ W \quad A \quad S \quad I \quad T \quad I \quad S \quad A \quad W \\ W \quad A \quad S \quad I \quad T \quad A \quad T \quad I \quad S \quad A \quad W \\ W \quad A \quad S \quad I \quad T \quad A \quad C \quad A \quad T \quad I \quad S \quad A \quad W \\ W \quad A \quad S \quad I \quad T \quad A \quad T \quad I \quad S \quad A \quad W \\ W \quad A \quad S \quad I \quad T \quad I \quad S \quad A \quad W \\ W \quad A \quad S \quad I \quad S \quad A \quad W \\ W \quad A \quad S \quad A \quad W \\ W \quad A \quad W \\ W \end{array}$$

Problème 22

Montrer que l'expression $\frac{15n + 13}{6n + 5}$ est irréductible pour tout nombre naturel n.

Solution suggérée

Supposons que l'expression ne soit pas irréductible. On doit avoir:

$$hx = 15n + 13 \quad (1)$$
$$\text{et } hy = 6n + 5 \quad (2) \text{ où}$$

h est le facteur commun aux deux expressions.

$$\text{On a:} \quad 2hx = 30n + 26 \quad (3)$$
$$5hy = 30n + 25 \quad (4)$$

(3) − (4) donne:

$$h(2x - 5y) = 1 \quad (5)$$

Ce qui est impossible. Donc,

$$\frac{15n + 13}{6n + 5} \text{ est irréductible.}$$

Veuillez adresser toute correspondance à:

Jean-Marie Labrie
C.P. 247
Montréal-Nord H1H 5L2