LES SUITES ARITHMÉTIQUES:
UN UNIVERS À EXPLORER

Charles E. Jean, Rimouski

«Les nombres se suivent, mais ne se ressemblent pas.»

La suite des nombres entiers constitue la base de toute l'arithmétique. Elle permet, en effet, d'asseoir un système qui quantifie les objets de façon si claire que la compréhension du concept est partagée par tous les individus. Chacun sait ce que représente DIX dollars; mais, il serait difficile de s'entendre sur la quantité correspondante à PLUSIEURS dollars.

Dans la nature, les événements se succèdent souvent d'une façon constante. Ainsi, les heures se suivent jusqu'à ce qu'un jour soit formé; les minutes se suivent jusqu'à ce qu'une heure soit formée, etc. Dans le calendrier scolaire, les jours de classe sont identifiés jour 1, jour 2, jour 3, etc. Personne n'aurait l'idée d'adopter la séquence suivante: jour 2, jour 5, jour 3, jour 1, jour 4.

Ainsi, l'ensemble des nombres entiers consécutifs peut être écrit sous forme d'une suite arithmétique. Chaque terme diffère alors du précédent d'une quantité fixe, appelée raison. Dans la suite arithmétique 1, 2, 3, 4, etc., la raison est 1. Comme nous le verrons plus loin, il est intéressant de considérer des suites dont la «raison» n'est plus un nombre fixe mais plutôt une autre suite. Nous les appellerons *suites arithmétiques* (de différents degrés).

1.0 Suite arithmétique de degré zéro

La suite arithmétique de degré 0 est formée par la répétition d'un seul même nombre. Voici une telle suite: 3, 3, 3, 3, 3, ... Cette suite est sans intérêt, car nous connaissons toujours le terme d'un rang quelconque.

2.0 Suite arithmétique de degré 1

Par définition, la raison de la suite arithmétique de degré 1 est une constante non nulle. Les suites arithmétiques de degré 1 sont habituellement appelées «*progressions arithmétiques*». Les termes de cette suite sont transformés par l'addition de cette constante. C'est donc dire que les différences successives des termes d'une suite arithmétique de degré 1 forment une suite arithmétique de degré 0. De même, la suite des différences successives des termes d'une suite arithmétique de degré «d» formeront une suite arithmétique de degré (d-1).

Construisons, par exemple, la suite arithmétique de degré 1 dont le premier terme est 10 et la raison est 3.

10, 13, 16, 19, 22, ...

Pour toute suite arithmétique, nous aimerions trouver une expression donnant son n^e terme, noté x_n. Dans l'exemple précédent, on a $x_n = 3n + 7$.

Pour expliquer comment trouver cette formule lorsque nous connaissons les premiers termes de la suite, prenons, par exemple, la suite 8, 15, 22, 29, 36, ...

Une suite du *premier* degré est toujours présentée par une équation de même degré. La formule générale est $x_n = an + b$ où a et b sont des constantes.

Appliquons, dans cette équation, les valeurs correspondantes de «n» et de «x_n».

On a: $x_1 = 8$, d'où, $a \times 1 + b = 8 \quad (1)$
$x_2 = 15$, d'où, $a \times 2 + b = 15 \quad (2)$

Soustrayons (1) de (2). Nous trouvons que «a» est égal à 7, puis «b» à 1.

L'équation est donc $x_n = 7n + 1$.

Connaissant cette équation, nous pouvons identifier facilement le terme de tout rang. Ainsi, le 100^e terme est 701. Remarquons qu'il suffit de connaître les deux premiers termes seulement d'une suite arithmétique du premier degré pour trouver l'équation correspondante.

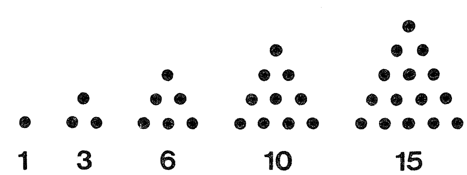
3.0 Suite arithmétique de degré 2

Les suites arithmétiques de degré supérieur à l'unité ne sont pas tellement connues car peu d'auteurs en ont traité. Pourtant les cas concrets sont également nombreux.

Indiquons d'abord que la raison d'une suite arithmétique de degré supérieur à l'unité n'est pas une constante, mais les termes successifs d'une suite du degré inférieur. Pour construire une suite arithmétique de degré 2, il nous faut un premier terme et une suite arithmétique de degré 1. Par exemple, en partant avec 1 et en utilisant la suite 2, 3, 4, 5, ... comme raison, nous obtenons la suite de degré 2 suivante:

$$\boxed{1, 3, 6, 10, 15, \ldots}$$

Il est intéressant de noter que les nombres qui forment cette suite sont dits *triangulaires* et peuvent être représentés par un triangle de boules.



Le terme général d'une suite arithmétique de degré 2 est un polynôme à coefficients entiers de degré 2 en «n», c'est-à-dire $x_n = an^2 + bn + c$.

Exemple:

Trouvons l'équation correspondant à la suite:

$$\boxed{3, 5, 9, 15, 23, \ldots}$$

Vérifions d'abord le degré de la suite en faisant les différences successives

3	5	9	15	23	———	degré 2
	2	4	6	8	———	degré 1
		2	2	2	———	degré 0

Dans l'équation de forme générale, remplaçons n et x_n par leur valeur correspondante pour les trois premiers termes:

$$\begin{array}{ll}(1) & a + b + c = 3\\ (2) & 4a + 2b + c = 5\\ (3) & 9a + 3b + c = 9\end{array}$$

En soustrayant (2) de (3), puis (1) de (2), nous obtenons:

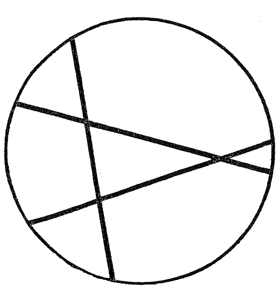
$$\begin{array}{ll}(4) & 5a + b = 4\\ (5) & 3a + b = 2\end{array}$$

En soustrayant (5) de (4), nous trouvons $a = 1$; puis, par substitution, $b = -1$ et $c = 3$. L'équation est

$$\boxed{x_n = n^2 - n + 3}$$

Il suffit de connaître les trois premiers termes d'une suite arithmétique du deuxième degré pour trouver l'équation correspondante.

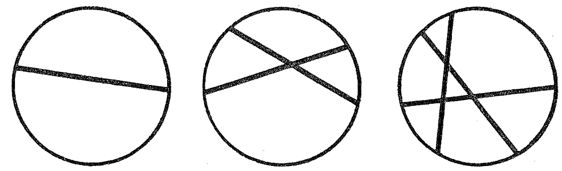
Le problème suivant permet d'utiliser les connaissances acquises:



Le cercle ci-contre est partagé par trois segments qui joignent deux points de la circonférence et qui se coupent entre eux. En combien de parties au maximum peut-on diviser un cercle en traçant 80 segments?

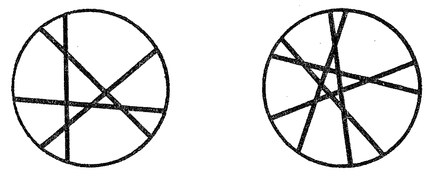
Faisons des expériences de façon à voir la progression du nombre de parties. Pour atteindre le maximum, coupons toujours les segments tracés.

1 segment — 2 segments — 3 segments



2 parties — 4 parties — 7 parties

4 segments — 5 segments



11 parties — 16 parties

La suite 2, 4, 7, 11, 16, ... est du deuxième degré.

2	4	7	11	16	———	degré 2
	2	3	4	5	———	degré 1
		1	1	1	———	degré 0

Nous pouvons trouver l'équation qui est:

$$\boxed{x_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}}$$

(Voir *«Deux problèmes de combinatoire»* par Jacques Labelle, Bulletin AMQ, 1978, vol. XVIII, no 2, pp. 34-38)

Si $n = 80$, alors $x_n = 3241$. En traçant 80 segments dans un cercle, c'est donc 3241 parties au maximum que nous pouvons obtenir.

4.0 Suite arithmétique de degré 3

Écrivons une suite qui commence par 7 et dont la raison est la suite du deuxième degré 2, 4, 7, 11, 16, ... Cette suite est:

$$\boxed{7, 9, 13, 20, 31, 47, \ldots}$$

Le terme général est ici un polynôme de degré 3 en «n».

Soit $x_n = an^3 + bn^2 + cn + d$.

Pour trouver l'équation de cette suite, remplaçons n et x_n dans la formule générale. Nous obtenons les quatre équations suivantes:

$$\begin{array}{ll}(1) & a + b + c + d = 7\\ (2) & 8a + 4b + 2c + d = 9\\ (3) & 27a + 9b + 3c + d = 13\\ (4) & 64a + 16b + 4c + d = 20\end{array}$$

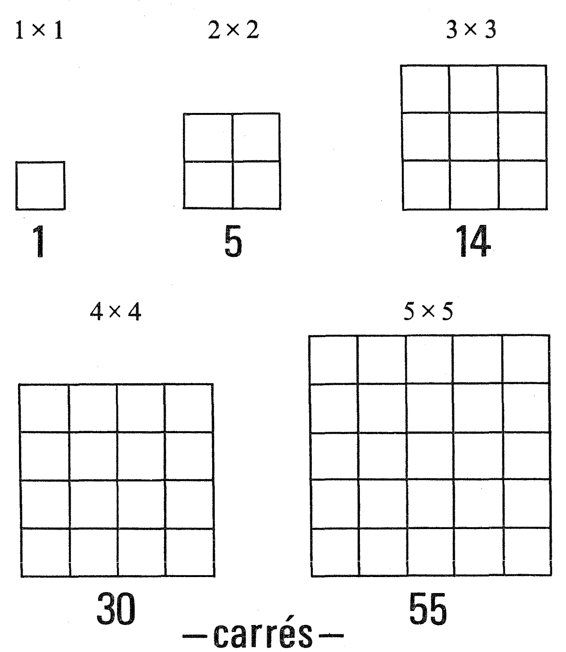
En résolvant ces quatre équations, nous trouvons les valeurs de a, b, c et d. L'équation de cette suite est:

$$x_n = \frac{n^3 + 5n + 36}{6}$$

Voici un problème:

> Combien peut-on compter de carrés de toutes dimensions dans une grille carrée formée de petits carrés?

Une des méthodes pour résoudre ce problème est de faire le comptage dans des carrés réduits. Nous remarquerons alors une suite de degré 3 et nous calculerons le centième terme.



On trouve facilement que l'équation de la suite 1, 5, 14, 30, 55, ... est:

$$x_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

Si n = 100, alors x = 338 350. On peut donc compter 338 350 carrés dans une grille carrée 100 × 100.

5.0 Suite arithmétique de degré d

Tout terme d'une suite arithmétique de n'importe quel degré d peut être représenté sous forme d'un polynôme de même degré d que la suite. Cette équation a la forme générale:

$$x_n = a_1 n^d + a_2 n^{d-1} + a_3 n^{d-2} + \dots + a_d$$

où $a_1, a_2, a_3, \dots, a_d$ sont des constantes entières,
n est le rang du terme
d est le degré de l'équation
x_n représente le n^e terme de la suite.

L'équation d'une suite arithmétique de degré 4 est:

$$x_n = a_1 n^4 + a_2 n^3 + a_3 n^2 + a_4 n + a_5$$

Par exemple,
$a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = -2$, $a_4 = 6$ et $a_5 = -2$,
l'équation sera

$$x_n = 3n^4 + 5n^3 - 2n^2 + 6n - 2$$

La suite correspondante est:

10, 90, 376, 1078, 2478, 4930, 8866, ...

Par ailleurs, connaissant les termes d'une suite arithmétique de degré d, nous pouvons trouver l'équation

1. en identifiant le degré de la progression,
2. en écrivant l'équation générale de même degré,
3. en remplaçant n et x_n par leur valeur dans l'équation générale de degré d de façon à trouver (d + 1) équations,
4. en résolvant ces équations pour trouver les coefficients du polynôme,
5. en substituant ces coefficients dans l'équation générale.

Nous pouvons maintenant formuler les remarques générales suivantes:

1. Tout terme d'une suite arithmétique de degré d peut être représenté par une équation de degré d.
2. Pour pouvoir trouver l'équation d'une suite arithmétique de degré d, il est nécessaire de connaître les (d + 1) premiers termes.
3. Le degré d'une suite arithmétique est déterminé par le calcul des différences successives, le terme constant correspond à une suite de degré 0.
4. Lorsque nous ajoutons un nouveau terme au début d'une suite, une autre équation correspond à cette suite.
5. La somme successive des deux premiers termes d'une suite, des trois premiers, des quatre premiers, etc. engendre une autre suite de degré (d + 1).

Problèmes et recherche

6.1 Sur du papier quadrillé, vous tracez le périmètre d'un carré de 2500 petits carrés. Le jeu consiste à construire de nouveau la grille en suivant les lignes, y compris le périmètre du carré, en partant d'un sommet du grand carré. En aucun temps, le crayon ne doit être levé et il n'est pas permis de passer deux fois sur une même ligne.

Quel est le maximum de carrés que vous allez construire de cette façon?

6.2 Sylvain joue chaque semaine à la loterie LOLO. Ses mises se présentent ainsi:

Sem. 1	Sem. 2	Sem. 3	Sem. 4	Sem. 5	Sem. 6
10 $	16 $	24 $	34 $	46 $	60 $

Combien Sylvain misera-t-il, lors de la 204e semaine, si les mises progressent selon la même règle?

6.3 La suite des nombres hexagonaux est 1, 6, 15, 28, 45, ...

a) Quel est le 1000e nombre hexagonal?
b) Quelle est la somme des 500 premiers nombres hexagonaux?

6.4 À sa première journée de cueillette, Judith a ramassé 5 rameaux; la troisième journée, 9 rameaux; la sixième journée, 33 rameaux; la dixième journée, 79 et la quinzième, 129 rameaux. En supposant que les jours de la cueillette se suivent toujours selon une même règle et que le résultat de la cueillette se fait selon une autre même règle, combien Judith aura-t-elle cueilli de rameaux au cours de ses 50 premiers jours pendant lesquels elle a effectivement ramassé des rameaux?

6.5 Vérifier l'affirmation suivante: «Additionner les n premiers termes d'une suite de degré d revient à trouver le terme de rang $(n - 1)$ d'une autre suite de degré $(d + 1)$ dont les termes proviennent de l'addition successive des deux premiers, des trois premiers, des quatre premiers termes, etc. de la suite de degré d.»

Charles-E. Jean

IN MEMORIAM

1. M. Michel Girard est décédé au mois de juin dernier. Il a été secrétaire de l'Association mathématique du Québec pendant quatre ans: de 1960 à 1964. Il a écrit au moins un article dans le Bulletin AMQ:
   Organisation de classes-pilotes en 1re année du cours secondaire.
   Vol. XI, no 2, janvier 1969, pp. 45-56.

2. M. Jean-Marie Huard est décédé pendant les vacances d'été 1985. Il était professeur de mathématiques au Cégep du Vieux-Montréal. Il a écrit au moins trois articles dans le Bulletin AMQ:
   a. *Axiomatique à un axiome dont la théorie est celle des groupes abéliens*
   Vol. XIV, no 1, sept. 1972, pp. 31-37.
   b. *Penser la sphère* (1re partie)
   Vol. XXII, no 4, déc. 1982, pp. 27-41.
   c. *Penser la sphère* (2e partie)
   Vol. XXIII, no 1, mars 1983, pp. 33-40

Au mois de février 1985, il a donné à l'unversité de Montréal, dans le cadre des *Belles soirées,* une série de trois conférences intitulées: «Poésie mathématique».

À toutes les familles éprouvées, nous offrons notre profonde sympathie.

Nouvelles

Mme Claudette TABIB, professeure de mathématiques au Cégep Édouard Montpetit et vice-présidente aux groupes, a donné une conférence à Glasgow (Écosse), lors de la Conférence internationale sur la combinatoire, qui a lieu du 22 au 26 juillet 1985. Félicitations!