Chronique: *L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES*

Louis Charbonneau, UQAM

L'ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ: UN PEU DE GÉOMÉTRIE

La méthode traditionnelle d'aborder la célèbre formule

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

qui résout l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ repose sur des manipulations algébriques visant à transformer l'équation pour la ramener à une forme similaire à celle de la non moins célèbre identité

$$(a + b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2).$$

On appelle «complétion du carré» cette façon d'obtenir la formule. Même si cette appellation est juste au strict plan algébrique, puisque, effectivement, on fait en sorte d'obtenir une expression qui soit un carré parfait, elle nous donne aussi l'impression qu'il y a quelque chose de plus sous cette formule, quelque chose de géométrique... C'est un peu dans le but d'aller au-delà de cette première impression que je veux vous présenter aujourd'hui quelques exemples de manipulations géométriques permettant de résoudre quelques types d'équations du second degré.

Bien sûr, puisque la géométrie, dans son sens commun, ne sait que faire des segments de longueur négative, on ne peut s'attendre à ce que les méthodes géométriques aient la généralité d'application de la formule algébrique. Ainsi, les coefficients des équations étudiées seront toujours positifs et le signe moins (−) indiquera simplement une soustraction de deux termes positifs. De même, les racines négatives ne seront pas mises en évidence, même si, dans certains cas, la construction géométrique pourrait en suggérer l'existence. Vous verrez que les exemples choisis illustrent de deux façons bien différentes la nature du discriminant. Avant de vous les présenter, une dernière remarque: pour notre propos, il est plus approprié de considérer la formule de résolution des équations du second degré sous la forme immédiatement équivalente:

$$x = \frac{-b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{c}{a}}.$$

En effet, comme nous le verrons, cette forme correspond davantage aux réalités géométriques sous-jacentes à la formule.

Descartes, ou le discriminant vu par le théorème de Pythagore

René Descartes (1596-1650) a joint à son célèbre *Discours de la méthode* (1637) quelques compléments dans lesquels il applique sa méthode sur des exemples précis. C'est dans celui qui a pour titre *La Géométrie* qu'il développe ses idées sur les relations entre la géométrie et l'algèbre, idées qui donneront lieu à ce qu'on appelle aujourd'hui la géométrie analytique. Parmi les premiers exemples choisis pour illustrer cette relation, on trouve la résolution géométrique de trois types d'équations du second degré. Les voici:

$$A - z^2 = az + bb.$$

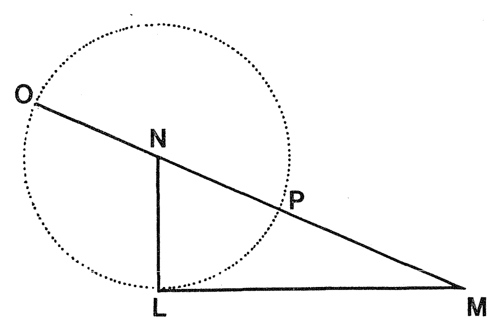
Dans cette équation, a et b sont bien sûr positifs. Les solutions sont donc:

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}$$

et

$$x = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}$$

Cette équation a toujours une racine positive à moins d'avoir une racine double égale à 0, si a et b sont eux-mêmes égaux à 0. Descartes propose la solution géométrique qui suit:



Il suffit de tracer un triangle rectangle NLM dont $\overline{NL}$ égale $\frac{a}{2}$ et $\overline{LM}$ égale b. Prolongeant $\overline{MN}$ jusqu'à O de sorte que $\overline{NO}$ soit égale à $\frac{a}{2}$, la longueur de $\overline{MO}$ ($\overline{ON} + \overline{NM}$) est le z cherché.

Descartes ne fait ici que traduire en langage géométrique la formule algébrique en considérant le discriminant comme la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle. On peut néanmoins mieux déceler qu'avec la formule toute sèche, l'influence des valeurs des coefficients a et b sur la valeur de la racine positive. Ainsi, pour que la racine soit 0, il est clair que a et b doivent être à la fois égaux à 0.

$$B - y^2 = -ay + bb.$$

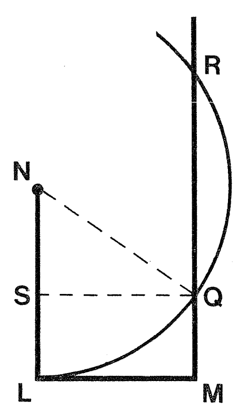
Cette équation se résout géométriquement en employant un procédé très semblable à celui de l'équation précédente, si ce n'est que la valeur de y est plutôt la longueur de $\overline{PM}$. (Comparez la figure avec la formule algébrique...). On voit par exemple que si b prend une très petite valeur, la racine positive prend elle-même une valeur très proche de 0.

[REMARQUES: Cette façon de résoudre cette dernière équation était probablement connue d'Euclide. En effet, dans les *Éléments,* livre II, proposition 11, ce dernier résout l'équation $L(L - x) = x^2$ par un procédé en partie similaire. Contrairement à Descartes, Euclide ne fait reposer sa construction que sur des considérations géométriques. Pour plus de détails, consulter les notes de cette proposition ainsi que celles de la proposition 6 du même livre dans: *The Thirteen Books of Euclid's Elements,* édité par T.L. Health, volume I, (Dover 1956, réimpression de la deuxième édition de 1925), pages 402-403 et 385-388.]

$$C - z^2 = az - bb.$$

Une discussion des racines de cette équation nous montre que si elle possède des racines réelles, celles-ci sont toutes les deux positives, ou l'une est nulle et l'autre vaut $\frac{a}{2}$. À nouveau, Descartes traduit géométriquement la formule algébrique:

Dans ce cas-ci, le discriminant n'est plus la racine d'une somme mais plutôt la racine d'une différence de carrés. Ainsi, il ne correspondra plus à l'hypoténuse d'un triangle rectangle, mais plutôt à l'un des côtés de l'angle droit. Traçons $\overline{LN}$ un segment de droite de longueur égale à $\frac{a}{2}$ et $\overline{LM}$, perpendiculaire à $\overline{LN}$, de longueur égale à b. Par M, élevons une perpendiculaire à $\overline{LM}$.



Le cercle de centre N et de rayon $\overline{NL}$ coupe (éventuellement) la perpendiculaire aux points R et Q. Les valeurs de z sont alors des longueurs de $\overline{MQ}$ et de $\overline{MR}$. En effet, $\overline{MQ}$ a pour longueur la longueur de $\overline{LN}$ moins la longueur de $\overline{NS}$, autrement dit:

$$z = \frac{a}{2} - \sqrt{(\tfrac{a}{2})^2 - b^2}.$$

De même, $\overline{MR}$ a une longueur égale à celle de $\overline{LN}$ plus celle de $\overline{NS}$.

Encore ici, l'influence des valeurs de a et b sur la valeur des racines de l'équation est visible. Si $b = 0$, la droite MR coupe le cercle en L et R se trouve au «sommet» du cercle. Donc $z = 0$ et $z' = \frac{a}{b}$. Si b est supérieur à $\frac{a}{2}$, alors clairement l'équation n'a pas de racine réelle.

[REMARQUES: Certains commentateurs d'Euclide ont pensé que ce dernier savait résoudre ce type d'équation. Pour plus de détails, consulter les notes sur la proposition du livre II des *Éléments* dans: *The Thirteen Books Euclid's Elements,* édité par T.L. Health, volume I, (Dover 1956, réimpression de la deuxième édition de 1925), pages 382-385.]

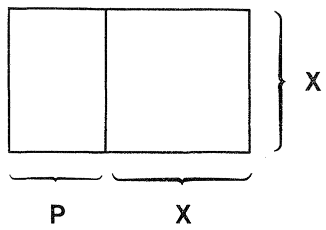
al-Khwarizmi, ou le discriminant vu comme le côté d'un carré

al-Khwarizmi (c. 780-c. 850) est l'un des mathématiciens arabes les plus importants pour nous. Par son intermédiaire, le système de numération hindo-arabe nous a été rendu accessible sous une forme déjà évoluée. D'ailleurs, le mot «algorithme» est une déformation latine de son nom. Mais au-delà de l'arithmétique élémentaire, son nom est indissociable de l'origine de l'algèbre. Dans son livre ayant pour titre *Bref ouvrage sur le calcul de l'algabr et l'almuKabala,* où al-gabr (d'où vient le terme algèbre) signifie remplissage (c'est-à-dire l'ajout de termes identiques de chaque côté d'une équation pour enlever les termes négatifs) et où almuKabala signifie mise en opposition (réduire les termes semblables), al-Khwarizmi traite de la résolution de tous les cas des équations du second degré. Ses méthodes ne sont généralement pas géométriques, mais parfois il donne des preuves géométriques. Nous en avons retenues trois où l'expression «complétion du carré» s'applique littéralement.

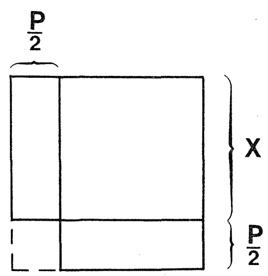
$$A - x^2 + px = q.$$

Cette équation, où p et q sont positifs, possède toujours une racine positive et une racine négative, à moins d'avoir une racine double nulle si p et q sont aussi nuls. La méthode du célèbre mathématicien est encore bien connue aujourd'hui. C'est un peu comme assembler un casse-tête.

Il s'agit de modifier la surface formée du carré ayant x de côté et d'un rectangle de côtés x et p de façon à la faire tenir dans un carré dont on connaîtrait la surface



totale. Une première façon de faire cela est de découper le rectangle en deux rectangles de côtés $\frac{p}{2}$ et x et d'accoler ces deux rectangles au carré x^2. Nous obtenons alors une forme en L (appelée gnomon) qui a toujours pour aire q. On complète alors le carré en ajoutant un petit carré de côté $(\frac{p}{2})$. Le grand carré ainsi obtenu a pour côté $(x + \frac{p}{2})$ et a pour aire $((\frac{p}{2})^2 + q)$.



On peut donc conclure de la construction précédente que:

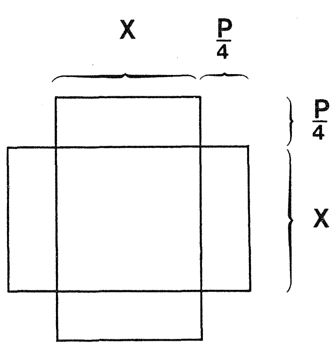
$$(x + \frac{p}{2})^2 = ((\frac{p}{2})^2 + q),$$

ou encore que:

$$x = \frac{-p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q}.$$

On retrouve ainsi la formule familière. On constate que le discriminant est ici le côté du carré qui a été «complété» en vue de solutionner l'équation. Dire que le discriminant est 0 équivaut à dire que la représentation géométrique du problème se réduit à un point... De même, si q s'approche de 0, le gnomon (la figure en forme de L) devient de plus en plus mince et l'apport du carré d'aire x^2 devient de plus en plus petite.

B − x^2 + px = q (Deuxième version)

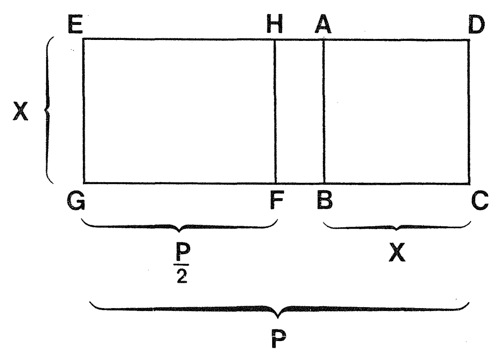


al-Khwarizmi propose une autre façon d'assembler le puzzle. Au lieu de diviser le rectangle de côtés x et p en deux, il le divise en quatre rectangles de côtés x et $\frac{p}{4}$ et les accole au carré x^2 comme suit. À vous maintenant de compléter la figure et d'en déduire la solution de l'équation...

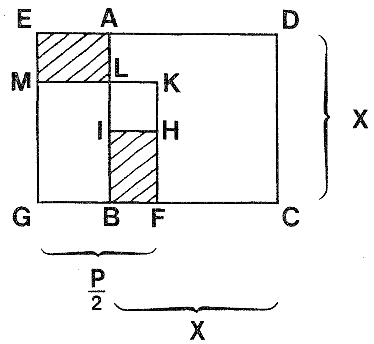
$$C - x^2 + q = px.$$

Cette équation, comme on l'a vu dans l'exemple C de Descartes, a, selon la valeur du discriminant, soit deux racines positives, soit une racine double égale à $\frac{p}{2}$, soit aucune racine réelle. Cependant l'approche diffère totalement de celle de Descartes. À nouveau, il s'agit de déterminer un carré dont on connaît l'aire. Cependant, contrairement aux exemples précédents, al-Khwarizmi doit user d'un artifice. Il considère l'équation algébriquement équivalente $(p - x)x = q$. Sous cette forme, puisque q est positif et que x doit l'être aussi, on peut conclure que x ne peut être plus grand que p. L'équation nous indique que le rectangle de côtés x et (p − x) a une aire q.

Supposons dans un premier temps que la valeur de x soit inférieure à $\frac{p}{2}$



Traçons un segment GC de longueur p. Sur $\overline{GC}$, plaçons le point B tel que $\overline{BC}$ égale x et un point F tel que $\overline{GF}$ égale $\frac{p}{2}$. En élevant à chaque point des perpendiculaires de longueur x et en traçant $\overline{ED}$, on a que l'aire du rectangle EGBA est (p − x)x ou q. Remarquez que $\overline{FC}$ a pour longueur $\frac{p}{2}$. Autrement dit, la longueur de $\overline{FB}$ plus x vaut $\frac{p}{2}$. Donc, si je prolonge $\overline{GE}$ jusqu'à M tel que $\overline{ME}$ soit de même longueur que $\overline{FB}$, alors, puisque $\overline{GE}$ est de longueur x, $\overline{GM}$ est de longueur $\frac{p}{2}$. Le carré MGFK est le carré que l'on cherchait. En plaçant I tel que $\overline{EI}$ égale $\overline{FH}$, j'ai que le rectangle MEIL a une aire égale au rectangle HFBA. On a de plus que le rectangle LIHK est en fait un carré, car, par construction, $\overline{LI}$ et $\overline{FB}$ ont même longueur et $\overline{IH}$ et $\overline{FB}$ ont aussi même longueur, car la longueur de $\overline{IH}$ plus x égale $\frac{p}{2}$ et $\overline{FB}$ satisfait cette même égalité.



Je sais maintenant d'une part que le carré MGFK a une aire de $(\frac{p}{2})^2$ et que ce même carré a une aire de q ($\square$ EGJK + $\square$ MEIL) plus l'aire du carré LIKH. On peut donc conclure que:

$$\square \text{ LIHK} = (\tfrac{p}{2})^2 - q$$

ou encore:

$$\overline{IH} = \overline{FB} = \sqrt{(\tfrac{p}{2})^2 - q}.$$

D'autre part, par construction:

$$\overline{FB} + x = \overline{FC} = \tfrac{p}{2}.$$

Donc:

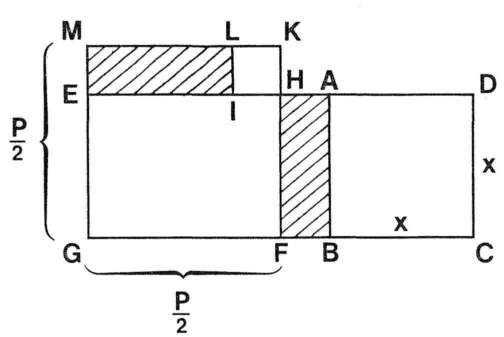
$$x = \tfrac{p}{2} - \sqrt{(\tfrac{p}{2})^2 - q}.$$

Nous avons obtenu une racine de l'équation. Pour déterminer l'autre, il faut:

Supposer que la valeur de x est supérieure à $\frac{p}{2}$.

Construisons une figure similaire à celle ci-haut où:

$$\overline{GC} = p,$$
$$\overline{GF} = \tfrac{p}{2},$$
$$\overline{GB} = (p - x),$$
$$\overline{GE} = x,$$
$$\overline{EM} = FB.$$



Le rectangle MGFK est un carré d'aire $(\frac{p}{2})^2$. C'est le carré cherché. En posant $\overline{GB}$ égal à $\overline{EA}$, on a que le rectangle LIHK est bien un carré et que le rectangle MEIL a la même aire que le rectangle HFBA.

L'aire du carré MGFK est égale d'une part à $(\frac{p}{2})^2$ et d'autre part à l'aire du carré LIHK plus q. D'où l'on peut conclure que:

$$\square \text{ LIHK} = (\tfrac{p}{2})^2 - q,$$

ou encore:

$$\overline{IH} = \overline{FB} = \sqrt{(\tfrac{p}{2})^2 - q}.$$

D'autre part:

$$x - \overline{FB} = \overline{FC} = \tfrac{p}{2}.$$

Donc:

$$x = \tfrac{p}{2} + \sqrt{(\tfrac{p}{2})^2 - q}.$$

Nous avons déterminé les deux valeurs positives des racines de l'équation. Notez que la méthode d'al-Khwarizmi n'a de géométrique que le support du raisonnement. Contrairement à ce que propose Descartes où la valeur de l'inconnue peut se mesurer directement sur la figure construite, la méthode d'al-Khwarizmi permet plutôt une visualisation d'un raisonnement qui débouche sur une expression algébrique (Il n'employait toutefois pas de symbolisme). On constate que ces raisonnements géométrico-algébriques reposent sur l'hypothèse que $q < (\frac{p}{2})^2$ car le discriminant est perçu ici comme le côté du carré (le carré LIHK) qui complète le gnomon d'aire q pour obtenir le carré d'aire $(\frac{p}{2})^2$. Si le discriminant vaut 0, autrement dit le carré LIHK est identifié à un point, les deux cas sont identiques et $x = \frac{p}{2}$. Si $q > (\frac{p}{2})^2$, alors les constructions ci-haut n'ont plus de sens. L'équation n'a pas de solution réelle.

Conclusion

La première fois que je suis entré en contact avec ces méthodes géométriques de résolution de quelques équations du second degré, j'ai été émerveillé. Je suis parfois un peu naïf lorsqu'il s'agit de mathématiques. Mais devant la possibilité de rendre plus dynamique une formule jusqu'alors statique, je m'enthousiasme encore. J'espère qu'il en a été un peu de même pour vous. À bientôt.