CONCOURS DE L'A.M.Q. 1985 *(niveau collégial)*

Question 6

Soit $(Px) = (x - a)(x - b)(x - c)$ un polynôme avec la condition $1 < a < b < c$ et écrivons

$P'(x) = (x - a)(x - b) + (x - a)(x - c) + (x - b)(x - c)$.

Montrer alors que le polynôme

$$Q(x) = (x^2 + 1)\, P(x)\, P'(x) + x\,(P(x))^2 + (P'(x))^2$$

possède au moins cinq racines réelles distinctes. Rappelons la propriété suivante: «Si un polynôme prend en a et en b ($a < b$) des valeurs de signe contraire, alors ce polynôme s'annule en un point de l'intervalle ouvert $]a, b[$.

Solution suggérée

On va montrer d'abord que $Q(x)$ possède quatre racines réelles distinctes sur l'intervalle (a, c). Il suffit en fait de montrer qu'il existe des nombres réels v, u tels que

$$Q(v) < 0,\ Q(w) < 0 \text{ avec } a < v < b < w < c.$$

En effet, d'une part, on a $Q(a) = 0 + x \cdot 0 + (P'(a))^2 < 0$ puisque $P'(a) = (a - b)(a - c) \neq 0$; de même on a

$$Q(b) > 0 \text{ et } Q(c) > 0.$$

D'autre part, on peut écrire $Q(x)$ dans la forme

$$\left(\frac{x^2 + 1}{2} P(x) + P'(x)\right)^2 - \frac{1}{4}(x^4 + 2x^2 - 4x + 1) \cdot (P(x))^2$$

en formant un carré parfait à partir des 1er et 3e termes de l'expression définissant $Q(x)$. Cherchons alors les racines de $Q_1(x) = \frac{x^2 + 1}{2} P(x) + P'(x)$. On a

On a $Q_1(a) = P'(a) > 0$, $Q_1(b) = (b - a)(b - c) < 0$ et

$$Q_1(c) = (c - a)(c - b) > 0.$$

Utilisant le rappel, il existe donc des réels v, w tels que $Q_1(v) = Q_1(w) = 0$ avec $a < v < b < w < c$. Or le polynôme $A(x) = x^4 + 2x^2 - 4x + 1$ est strictement positif sur $(1, \infty)$ car

$$A(x) = x^4 + 2x^2 - 4x + 1 > x^4 + 2x^2 - 4x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$$

sur cet intervalle. Ainsi $A(v)$ et $A(w)$ sont strictement positifs et finalement on a: $Q(v) = Q_1(v) - A(v)\,(P(v))^2 < 0$. Utilisant à nouveau le rappel, on voit que $Q(x)$ possède une racine réelle sur chacun des intervalles (a, v), (v, b), (b, w) et (w, c). $Q(x)$ possède donc au moins quatre racines réelles distinctes. Il reste à montrer que $Q(x)$ possède une autre racine réelle distincte des quatre premières. Or

$$Q_1(-2c) = -\left(\frac{4c^2 + 1}{2}\right)(2c + a)(2c + b)(3c) + (2c + a)(2c + b)$$
$$+ (2c + a)(3c) + 3c(2c + b)$$
$$\leqslant 2c^2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + 3c \cdot 3c + 3c \cdot 3c \cdot 3c \cdot 3c = -27c^2 < 0.$$

Comme $A(-2c)$ est également strictement positif sur $(-\infty, -1)$, on a $Q(-2c) < 0$ et donc $Q(x)$ possède une autre racine réelle sur $(-2c, a)$ distincte des quatre autres racines déjà mentionnées. $Q(x)$ possède donc au moins 5 racines réelles distinctes.